石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

自动控制原理

自动控制系统的数学模型

传递函数

主讲 ： 邢卉

传递函数

拉氏变换可以简化线性微分方程的求解。还可将线性定常微分方程转换为复数S域内的数学模型—传递函数。

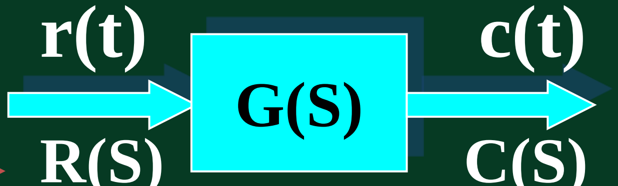
一、传递函数的定义及求取

二、典型环节的 传递函数及其动态响应

一、 传递函数的定义及求取

系统的结构图

输入 → r(t)　　　　c(t) ← 输出



输入拉氏变换 → R(S)　　　　C(S) ← 输出拉氏变换

传递函数的定义： 零初始条件下，系统输出量拉氏变换与系统输入量拉氏变换之比。

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}$$

例 求图示RLC电路的传递函数。

得 $$RC\frac{du_c}{dt}+LC\frac{d^2u_c}{dt^2}+u_c=u_r$$

拉氏变换：

$$RCsU_c(s)+LCs^2U_c(s)+U_c(s)=U_r(s)$$

传递函数为：

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

对微分方程的一般表达式进行拉氏变换得

$$(a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n)C(s)$$

$$= (b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m)R(s)$$

系统传递函数的一般表达式为

$$G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = \frac{b_0 s^m + b_1 s^{m-1} + \cdots + b_{m-1} s + b_m}{a_0 s^n + a_1 s^{n-1} + \cdots + a_{n-1} s + a_n}$$

式中： K_0— 为放大系数

$S = S_1，S_2 \cdots，S_n$ — 传递函数的极点

$S = Z_1，Z_2 \cdots，Z_m$ — 传递函数的零点

传递函数分母多项式就是相应微分方程的特征多项式，传递函数的极点就是微分方程的特征根。

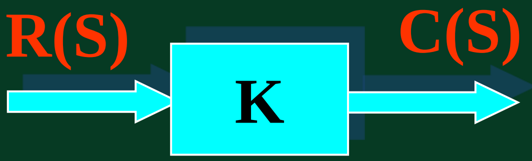
$$G(s) = \frac{K_0(s-z_1)(s-z_2)\cdots(s-z_m)}{(s-s_1)(s-s_2)\cdots(s-s_n)} \quad n>=m$$

二、 典型环节的传递函数及其动态响应

一般可将自动控制系统的数学模型看作由若干个典型环节所组成。研究和掌握这些典型环节的特性将有助于对系统性能的了解。

1．比例环节

比例环节方框图



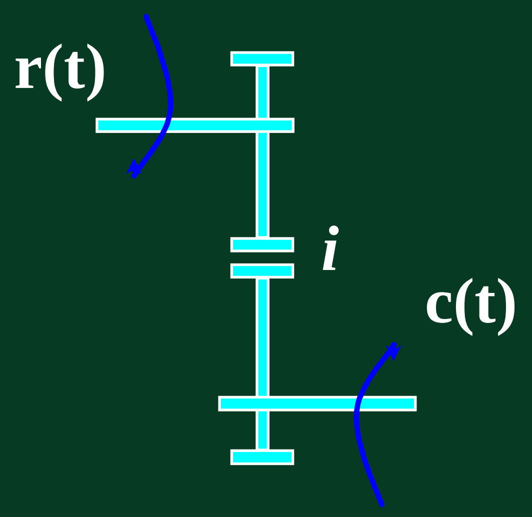
特点:　输出不失真,不延迟,成比例地复现输入信号的变化.

比例环节的传递函数:

$$G(s)=\frac{C(s)}{R(s)}=K$$

比例环节实例

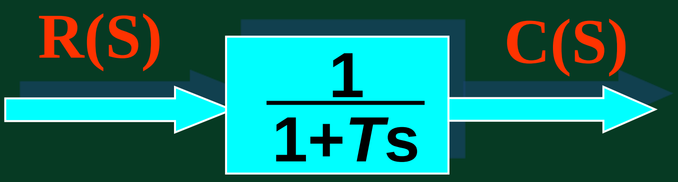
(c) 传动齿轮构成的比例环节



$$K=i$$

2．惯性环节

惯性环节方框图



单位阶跃信号作用下的响应:

$$R(s) = \frac{1}{s} \qquad C(s) = \frac{K}{Ts+1} \cdot \frac{1}{s}$$

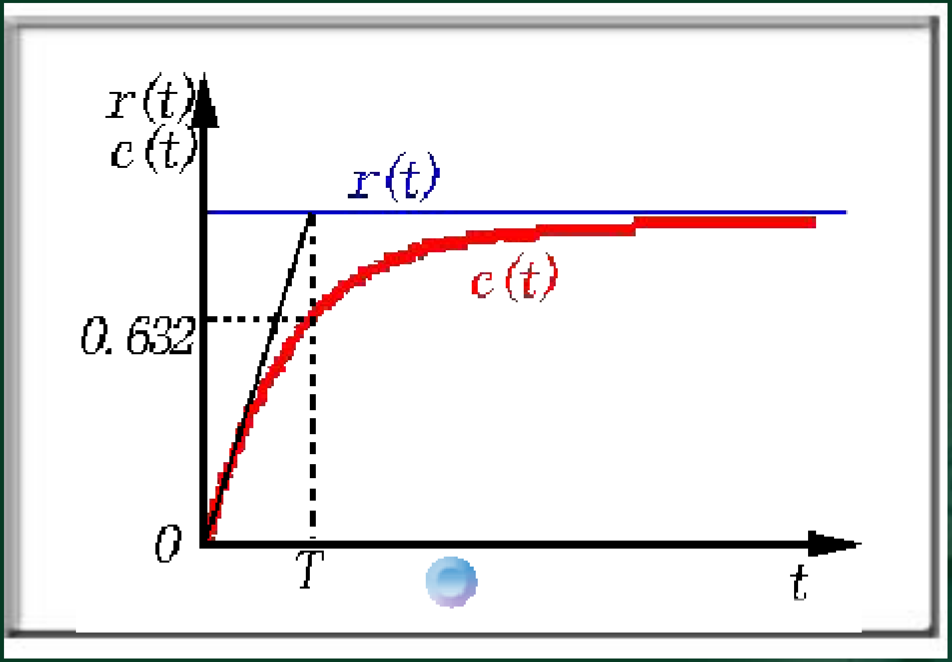
拉氏反变换得:

$$c(t) = K\left(1 - e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

单位阶跃响应曲线

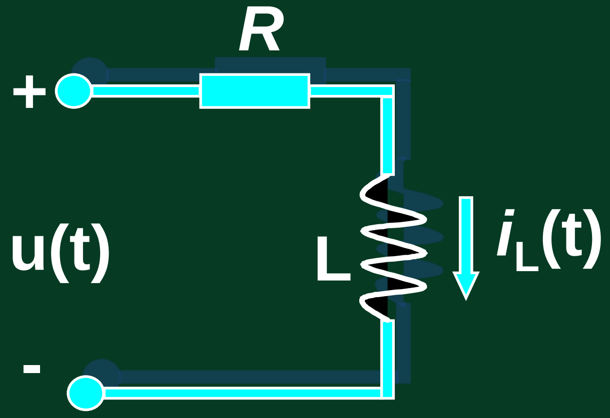
特点:

输出量不能瞬时完成与输入量完全一致的变化.



惯性环节实例

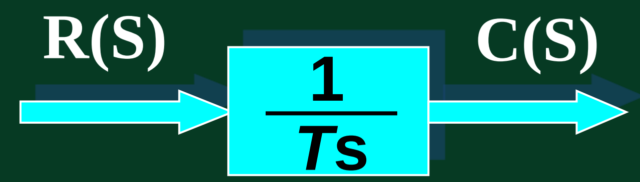
(b) RL电路构成的惯性环节



$$G(s) = \frac{1/R}{(L/R)S + 1}$$

3．积分环节

积分环节方框图



积分环节的单位阶跃响应：

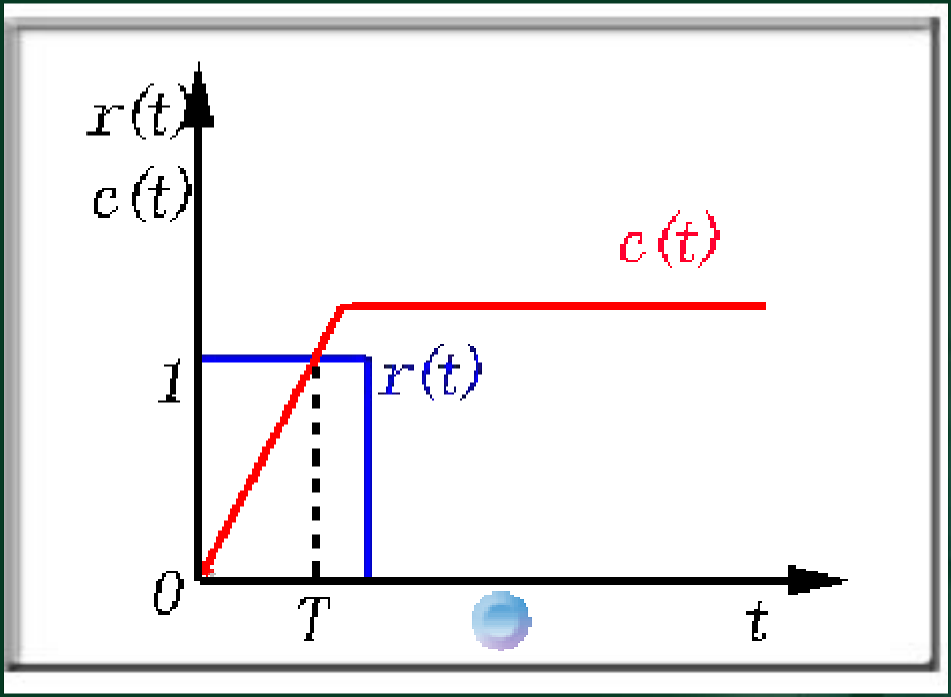
$$R(s)=\frac{1}{S}\qquad C(s)=\frac{1}{TS}\cdot\frac{1}{S}=\frac{1}{TS^2}$$

$$C(t)=\frac{1}{T}t$$

单位阶跃响应曲线

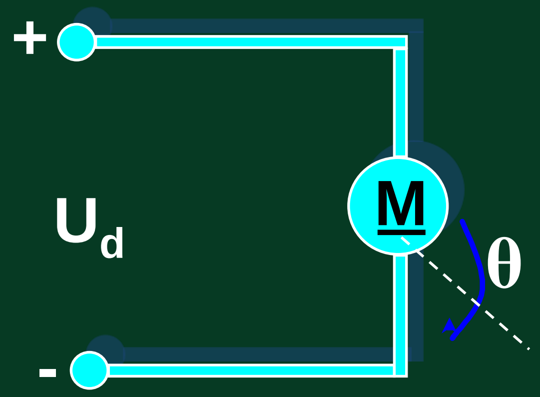
特点:

输出量与输入量对时间的积分成正比，具有滞后作用和记忆功能.



积分环节实例

(b) 电机构成的积分环节



$$G(s) = \frac{K}{S}$$

4．微分环节

理想微分环节数学模型：

$$c(t) = T\frac{dr(t)}{dt} \qquad G(s) = \frac{C(s)}{R(s)} = Ts$$

T — 微分时间常数

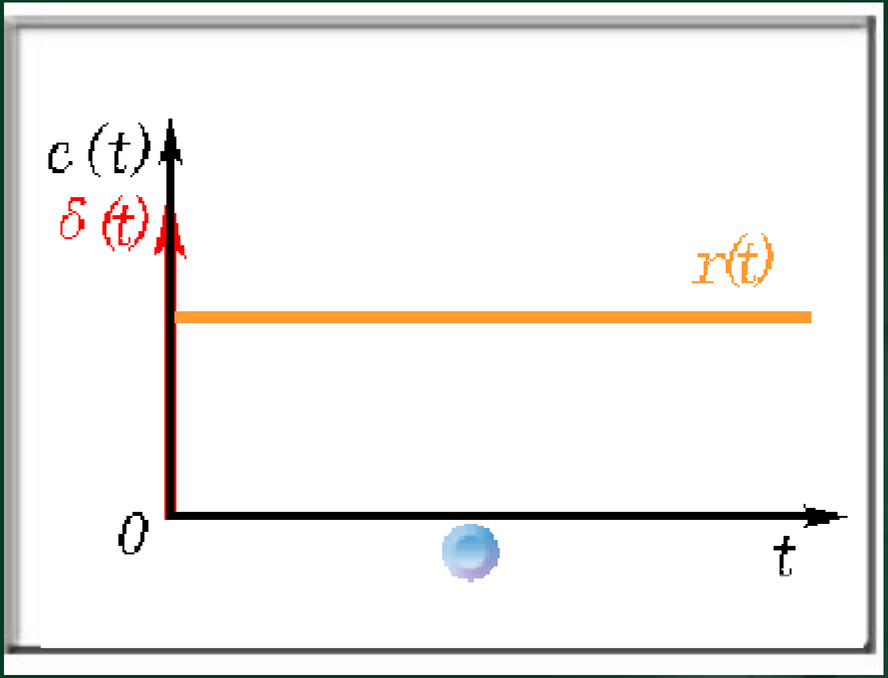
微分环节方框图

单位阶跃响应函数：

$$C(t) = T\delta(t)$$

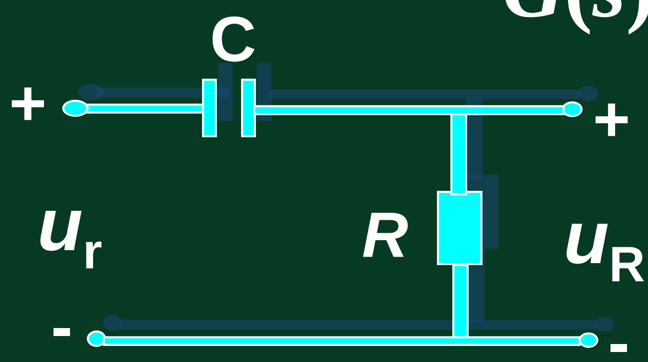
宽度为零、幅值无穷大的理想脉冲实际中是不可能实现的，实际的物理装置中常用近似理想微分环节。

单位阶跃响应曲线



近似理想微分环节实例

(b) RC电路构成的微分环节



$$G(s)=\frac{RCs}{RCS+1}=\frac{Ts}{Ts+1}$$

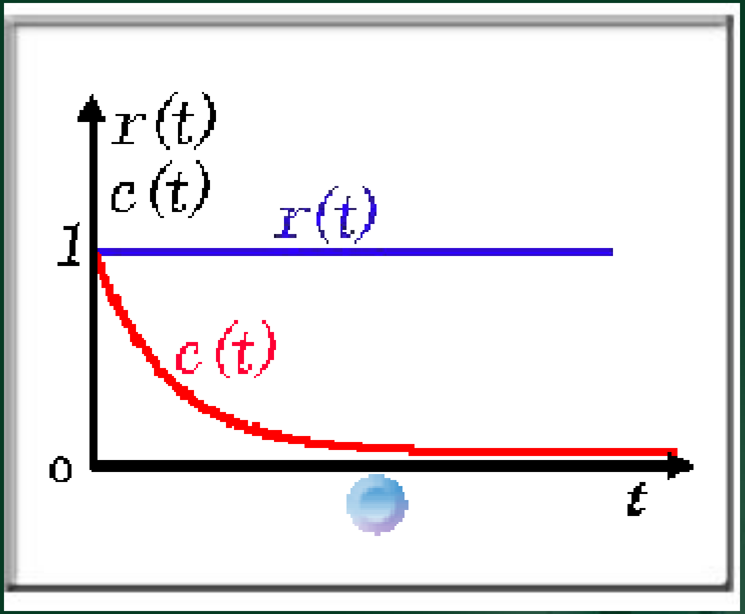
$$T=RC<<1$$

$$G(s)\approx Ts$$

实用微分环节的单位阶跃响应：

特点：

输出量反映了输入量的变化率，而不反映输入量本身的大小.

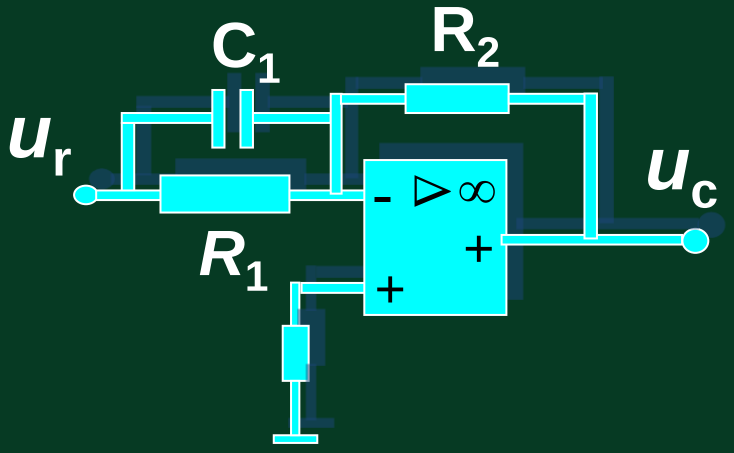


单位阶跃响应曲线

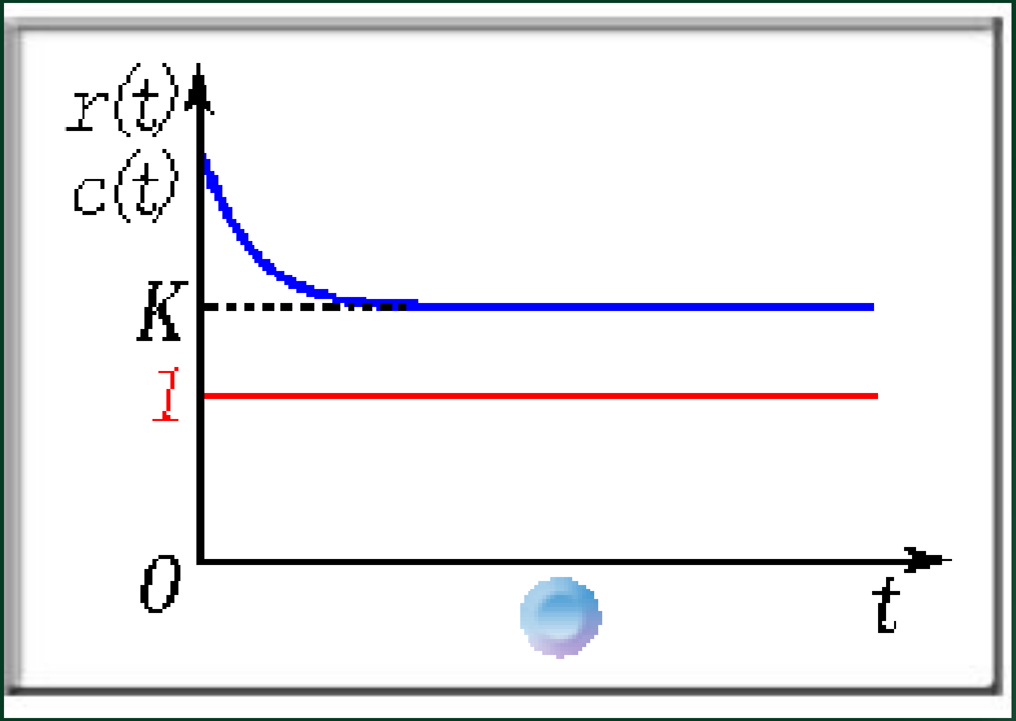
传递函数： $G(s)=\dfrac{C(s)}{R(s)}=K\,(Ts+1)$

单位阶跃响应：

$$c(t)=KT\delta(t)+K=K\,[T\delta(t)+1]$$



单位阶跃响应曲线



5. 振荡环节

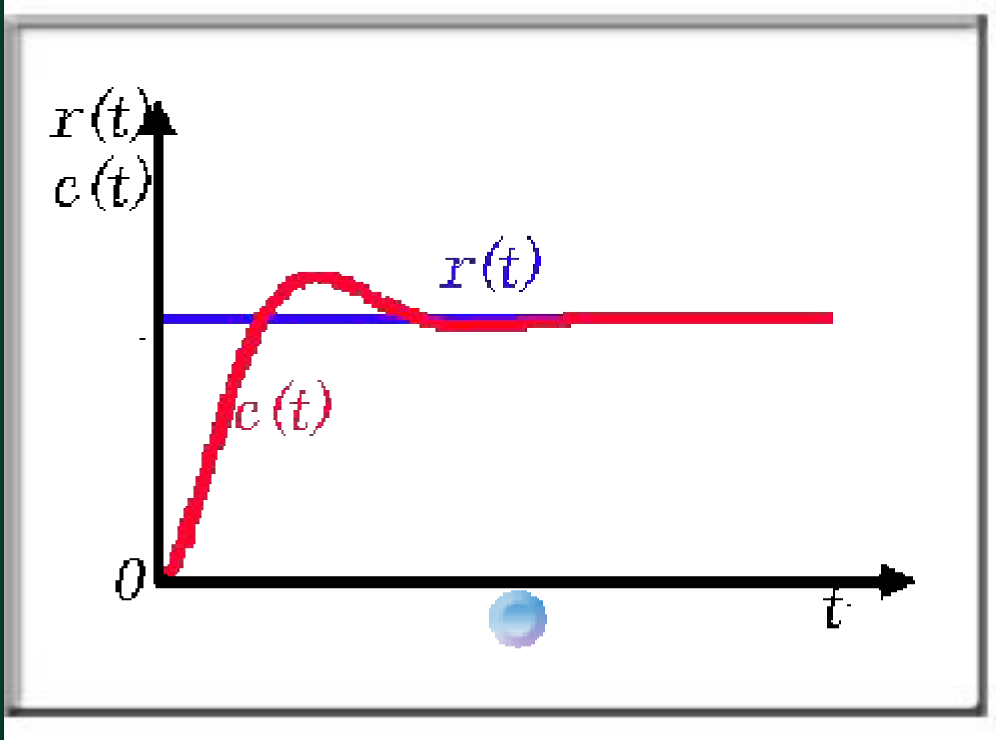
单位阶跃响应：

$$c(t)=1-\frac{e^{-\zeta\omega_n t}}{\sqrt{1-\zeta^2}}\mathrm{Sin}(\omega_d t+\beta)$$

振荡环节方框图

$$R(S)\longrightarrow\boxed{\frac{\omega_n^{\,2}}{S^2+2\xi\omega_n S+\omega_n^{\,2}}}\longrightarrow C(S)$$

单位阶跃响应曲线



常见振荡环节的实例：

（3）RLC电路

$$G(s)=\frac{U_c(s)}{U_r(s)}=\frac{1}{LCs^2+RCs+1}$$

（2）他激直流电动机

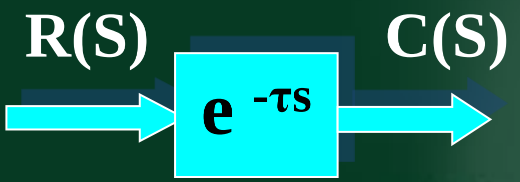
$$G(s)=\frac{N(s)}{U_a(s)}=\frac{1/\,C_e}{T_aT_ms^2+T_ms+1}$$

6．时滞环节

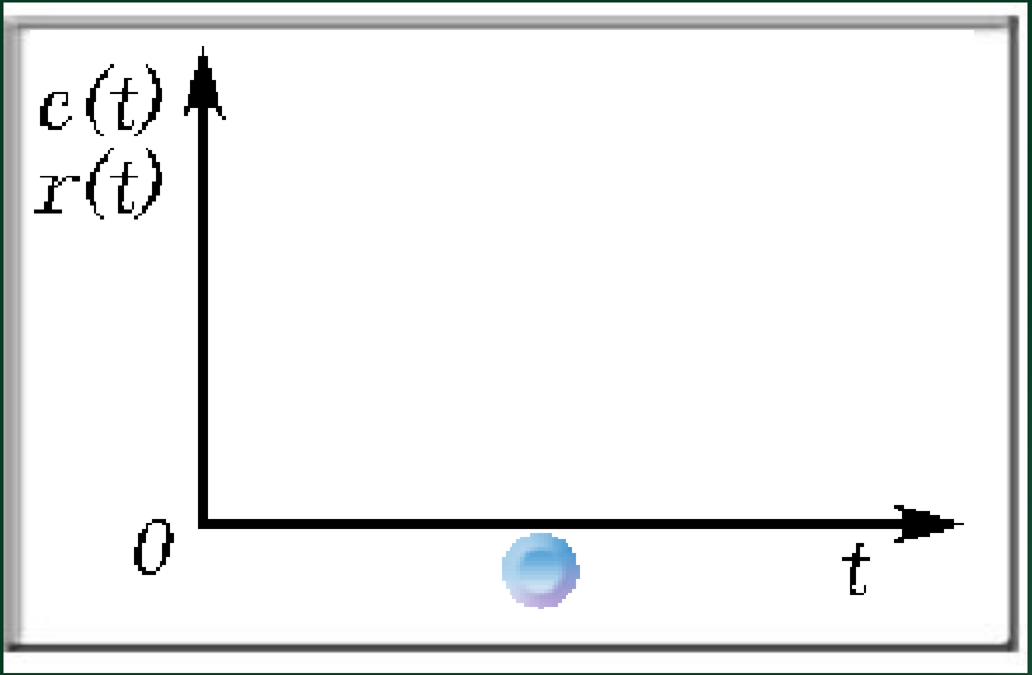
时滞环节作近似处理得

$$G(s)=\frac{1}{e^{\tau s}}=\frac{1}{1+\tau S+\dfrac{\tau^{2}}{2!}S^{2}+\cdots}\approx\frac{1}{1+\tau s}$$

时滞环节方框图



阶跃响应曲线



返回