

自动控制原理

自动控制系统的数学模型

控制系统的微分方程

主讲：邢卉

控制系统的微分方程

- 一、建立微分方程的一般步骤
- 二、常见环节和系统的微分方程的建立
- 三、线性微分方程式的求解



一、建立系统微分方程的一般步骤

(2) 建立初始微分方程组。

根据各环节所遵循的基本物理规律，分别列写出相应的微分方程，并构成微分方程组。

(3) 消除中间变量，将式子标准化。

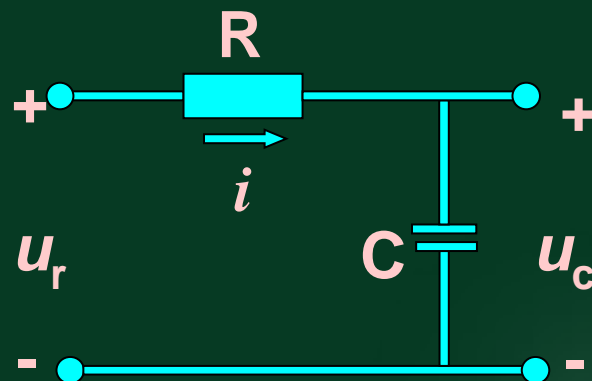
将与输入量有关的项写在方程式等号右边，与输出量有关的项写在等号的左边。

二、常见环节和系统微分方程的建立

1. RC电路

(2) 建立初始微分方程组

$$\begin{cases} u_r = Ri + u_c \\ i = C \frac{du_c}{dt} \end{cases}$$



$$RC \frac{du_c}{dt} + u_c = u_r$$

(3) 消除中间变量, 使式子标准化

RC电路是一阶常系数线性微分方程。

2. 机械位移系统

系统组成:

质量 弹簧 阻尼器

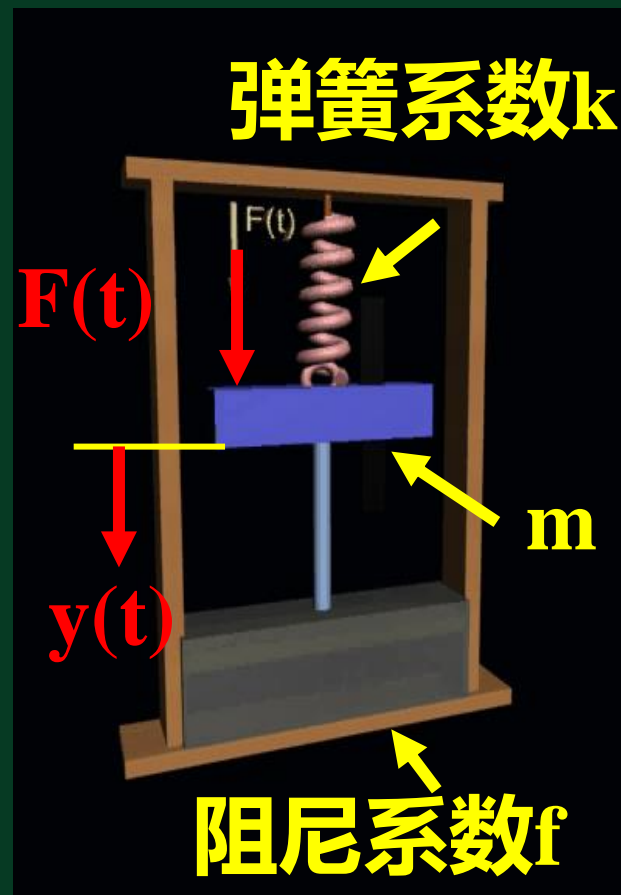
输入量 输出量

初始微分方程组:

根据牛顿第二定律

$$F = ma$$

$$F(t) - F_B(t) - F_K(t) = ma$$



中间变量关系式:

$$\left\{ \begin{array}{l} F_K(t) = k y(t) \\ F_B(t) = f \frac{dy(t)}{dt} \\ a = \frac{d^2y(t)}{dt^2} \end{array} \right.$$

消除中间变量得:

$$m \frac{d^2y(t)}{dt^2} + f \frac{dy(t)}{dt} + ky(t) = F(t)$$

系统微分方程由输出量各阶导数和输入量各阶导数以及系统的一些参数构成。

系统微分方程的一般表达式为：

$$\begin{aligned} & a_0 \frac{d^n c(t)}{dt^n} + a_1 \frac{d^{n-1} c(t)}{dt^{n-1}} + \dots + a_{n-1} \frac{dc(t)}{dt} + a_n c(t) \\ & = b_0 \frac{d^m r(t)}{dt^m} + b_1 \frac{d^{m-1} r(t)}{dt^{m-1}} + \dots + b_{m-1} \frac{dr(t)}{dt} + b_m r(t) \end{aligned}$$

三、线性微分方程式的求解

解： 将方程两边求拉氏变换得：

$$s^2C(s) + 2sC(s) + 2C(s) = R(s)$$

$$R(s) = 1$$

$$C(s) = \frac{1}{s^2 + 2s + 2} = \frac{1}{(s + 1)^2 + 1}$$

求拉氏反变换得：

$$c(t) = e^{-t} \sin t$$