石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

高等数学下

常微分方程

高阶线性微分方程(4)

主讲 ：王秋宝

目录

- 待定系数法(2)；
- 常数变易法;
- 内容小结。

待定系数法(2)

2. $f(x)=\left[\,P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\,\right]e^{\lambda x}$ 型

对非齐次方程

$$y''+py'+qy=\left[\,P_l(x)\cos\omega x+P_n(x)\sin\omega x\,\right]e^{\lambda x}$$

$\lambda+i\omega$为特征方程的 k 重根 ($k=0, 1$),

则可设特解: $y^*=x^k\left[Q_m\cos\omega x+R_m\sin\omega x\right]e^{\lambda x}$

其中 $m=\max\{\,n,l\,\}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

待定系数法(2)

例1 写出下列方程的特解形式：

$$y''+3y'+2y=x^2(\cos x+\sin x)e^{-x}$$

$$y''+y=2x\cos x-3\sin x$$

$$y''-y=4\cos x+e^{x}$$

常数变易法

非齐线性方程

齐线性方程

特解 $\xleftarrow{\text{表示}}$ 基解组

关键

非齐线性方程通解

$x_1(t), x_2(t)$ 为齐次方程的基本解组，

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

为齐次的通解。

设 $x = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ 为对应的非齐次方程的通解。

常数变易法

$$x_1(t)c_1'(t)+x_2(t)c_2'(t)=0$$

$$x_1'(t)c_1'(t)+x_2'(t)c_2'(t)=f(t)$$

常数变易法

例2 求方程 $x'' + x = \dfrac{1}{\cos t}$ 的通解

解 令 $x = c_1(t)\cos t + c_2(t)\sin t$

$$c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\sin t = 0$$

$$-c_1'(t)\sin t + c_2'(t)\cos t = \frac{1}{\cos t}$$

解得 $c_1'(t) = -\dfrac{\sin t}{\cos t}$ $\quad c_2'(t) = 1$

$$c_1(t) = \ln|\cos t| + \gamma_1 \quad c_2(t) = t + \gamma_2$$

原方程的通解为 $x = \gamma_1 \cos t + \gamma_2 \sin t + \cos t \ln|\cos t| + t\sin t$

内容小结

1. $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

λ 是特征方程的 k 重根,

可设特解

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x} \quad (k=0,1,2)$$

2. $f(x)=\left[\, P_l(x)\cos\omega x + P_n(x)\sin\omega x \,\right]e^{\lambda x}$ 型

$\lambda + i\omega$为特征方程的 k 重根 ($k=0, 1$),

则可设特解: $y^* = x^k\left[Q_m\cos\omega x + R_m\sin\omega x\right]e^{\lambda x}$

其中 $m=\max\{\,n, l\,\}$