



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

常微分方程

高阶线性微分方程 (4)

主讲：王秋宝

目录

- 待定系数法(2)；
- 常数变易法；
- 内容小结。



待定系数法 (2)

2. $f(x) = [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x] e^{\lambda x}$ 型

对非齐次方程

$$y'' + py' + qy = [P_l(x) \cos \omega x + P_n(x) \sin \omega x] e^{\lambda x}$$

$\lambda + i\omega$ 为特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$),

则可设特解: $y^* = x^k [Q_m \cos \omega x + R_m \sin \omega x] e^{\lambda x}$

其中 $m = \max \{ n, l \}$

上述结论也可推广到高阶方程的情形.

待定系数法 (2)

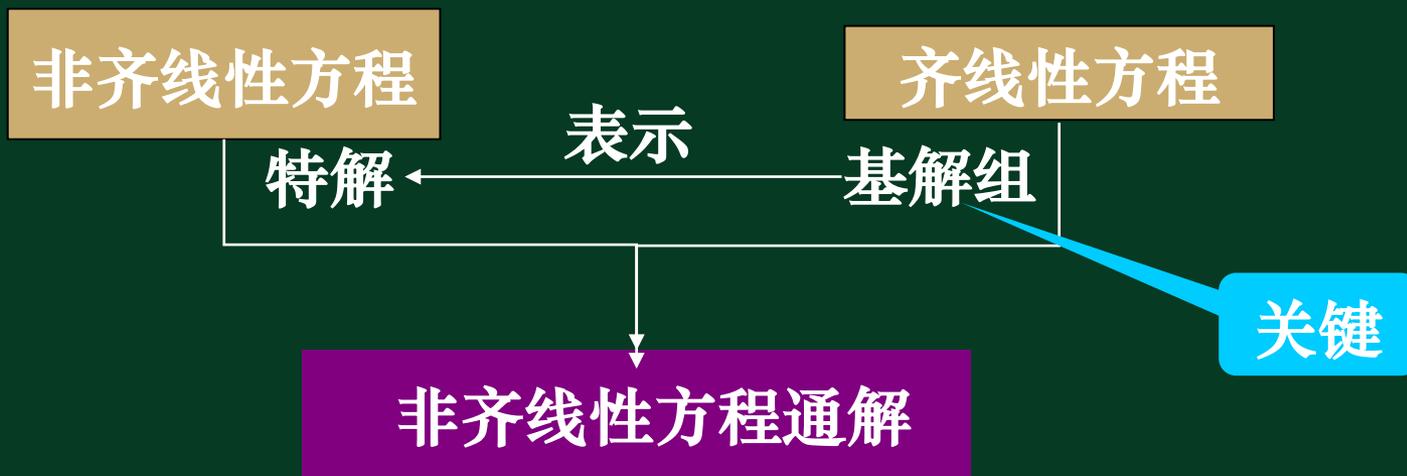
例1 写出下列方程的特解形式：

$$y'' + 3y' + 2y = x^2(\cos x + \sin x)e^{-x}$$

$$y'' + y = 2x \cos x - 3 \sin x$$

$$y'' - y = 4 \cos x + e^x$$

常数变易法



$x_1(t), x_2(t)$ 为齐次方程的基本解组,

$$x = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t)$$

为齐次的通解。

设 $x = c_1(t)x_1(t) + c_2(t)x_2(t)$ 为对应的非齐次方程的通解。

常數變易法

$$x_1(t)c_1'(t) + x_2(t)c_2'(t) = 0$$

$$x_1'(t)c_1'(t) + x_2'(t)c_2'(t) = f(t)$$



常数变易法

例2 求方程 $x'' + x = \frac{1}{\cos t}$ 的通解

解 令 $x = c_1(t) \cos t + c_2(t) \sin t$

$$c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \sin t = 0$$

$$-c_1'(t) \sin t + c_2'(t) \cos t = \frac{1}{\cos t}$$

解得 $c_1'(t) = -\frac{\sin t}{\cos t}$ $c_2'(t) = 1$

$$c_1(t) = \ln|\cos t| + \gamma_1 \quad c_2(t) = t + \gamma_2$$

原方程的通解为 $x = \gamma_1 \cos t + \gamma_2 \sin t + \cos t \ln|\cos t| + t \sin t$



内容小结

1. $f(x) = P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

λ 是特征方程的 k 重根,

可设特解

$$y^* = x^k Q_m(x)e^{\lambda x} \quad (k = 0, 1, 2)$$

2. $f(x) = [P_l(x)\cos \omega x + P_n(x)\sin \omega x]e^{\lambda x}$ 型

$\lambda + i\omega$ 为特征方程的 k 重根 ($k = 0, 1$),

则可设特解: $y^* = x^k [Q_m \cos \omega x + R_m \sin \omega x]e^{\lambda x}$

其中 $m = \max \{ n, l \}$