石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

常微分方程

高阶线性微分方程(3)

主讲 ：王秋宝

目录

- 二阶常系数非齐次线性微分方程；
- 待定系数法(1)。

二阶常系数非齐次线性微分方程

形式：$y'' + py' + qy = f(x)$

根据解的结构定理，其通解为

$$y = \underset{\text{齐次方程通解}}{Y} + \underset{\text{非齐次方程特解}}{y^*}$$

求特解的方法 — 待定系数法

根据 $f(x)$ 的特殊形式，给出特解 y^* 的待定形式，代入原方程比较两端表达式以确定待定系数。

待定系数法(1)

1. $f(x)=P_m(x)e^{\lambda x}$ 型

设特解为 $y^*=e^{\lambda x}Q(x)$, 其中 $Q(x)$ 为待定多项式，

$$y^{*\prime}=e^{\lambda x}[\lambda Q(x)+Q'(x)]$$

$$y^{*\prime\prime}=e^{\lambda x}[\lambda^2 Q(x)+2\lambda Q'(x)+Q''(x)]$$

代入原方程，得

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)$$

$$+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

待定系数法(1)

$$Q''(x)+(2\lambda+p)Q'(x)+(\lambda^2+p\lambda+q)Q(x)=P_m(x)$$

(1) 若λ不是特征方程的根，即 $\lambda^2+p\lambda+q\neq 0,$

则取 $\boldsymbol{Q(x)}$ 为 $\boldsymbol{m}$ 次待定系数多项式

从而得到特解形式为 $y^*=Q_m(x)e^{\lambda x}$.

(2) 若λ是特征方程的单根即， $\lambda^2+p\lambda+q=0,$ $2\lambda+p\neq 0$,

则取 $Q'(x)$为$\boldsymbol{m}$ 次多项式,从而得到特解形式为

$$y^*=xQ_m(x)e^{\lambda x}$$

(3) 若 λ是特征方程的重根 ，即 $\lambda^2+p\lambda+q=0$ $2\lambda+p=0$

则取 $Q''(x)$ 为$\boldsymbol{m}$ 次多项式,从而得到特解形式为

$$y^*=x^2Q_m(x)e^{\lambda x}$$

待定系数法(1)

总结

对方程 $y'' + py' + qy = P_m(x)e^{\lambda x}$

当λ 是特征方程的 k 重根 时,

可设特解

$$y^* = x^k Q_m(x) e^{\lambda x} \quad (k = 0, 1, 2)$$

此结论可推广到高阶常系数线性微分方程 .

待定系数法(1)

例1　求方程$y''-2y'-3y=3x+1$的通解.

例2　求方程$y''-3y'+2y=xe^{x}$的通解.