石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

常微分方程

高阶线性微分方程(1)

主讲 ：王秋宝

目录

- 高阶线性微分方程的概念；
- 高阶线性微分方程解的结构。

高阶线性微分方程的概念

n 阶线性微分方程的一般形式为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f(x) \quad (1)$$

$f(x)\neq 0$时，称为n 阶非齐次线性微分方程；

把将非齐次方程的右端改写为“0”得到的方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=0 \quad (2)$$

称为n 阶齐次线性微分方程

高阶线性微分方程解的结构

定理 1 （齐次线性微分方程解的线性性质）若 y_1 与 y_2 是(2)的解，则它们的和 y_1+y_2 也是(2)的解；

若 y 是(2)的解，则对任意常数 C，Cy 也是它的解。

定义1（函数的线性相关性） 设 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 为区间*I*上的*n*个函数，若存在不全为零的*n*个常数 $k_1, k_2, \cdots, k_n$ 使它们的线性组合

$$k_1y_1+k_2y_2+\cdots+k_ny_n \equiv 0, x\in I$$

成立，则称函数组 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 在区间*I*上线性相关，否则称它们线性无关。

高阶线性微分方程解的结构

定理2 （齐次线性微分方程的通解）若 $y_1, y_2, \cdots, y_n$ 是 ***n*** 阶齐次线性方程(2)的 ***n*** 个线性无关解，则方程的通解为

$$y = C_1 y_1 + \cdots + C_n y_n$$

定理3 若齐次线性方程(2)中的 $a_1, a_2, \cdots, a_n$ 均为实函数，且实变量复值函数 $y = u(x) + iv(x)$ 是(2)的解，则实值函数 $u(x), v(x)$ 均是(2)的解。

高阶线性微分方程解的结构

定理4　　若 y_1^*, y_2^* 是非齐次线性微分方程(1)的任意两个解，则它们的差

$$y_1^* - y_2^*$$

是对应齐次方程(2)的解。

定理5（非齐次线性方程的通解）　　若 y^* 是非齐次方程线性微分方程(1)的一个解, Y 是相应齐次方程的通解, 则

$$y = Y + y^*$$

是非齐次方程(1)的通解。

高阶线性微分方程解的结构

定理6　　设 y_1^* 与 y_2^* 分别为方程

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_1(x)$$

与

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_2(x)$$

的解，则

$$y=y_1^*+y_2^*$$

为

$$y^{(n)}+a_1(x)y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}(x)y'+a_n(x)y=f_1(x)+f_2(x)$$

的解。

高阶线性微分方程解的结构

例 1

设 y_1^*，y_2^*，y_3^* 是 $y''+p(x)y'+q(x)y=f(x)\left(f(x)\neq 0\right)$ 的三个线性无关的解，证明：该方程的通解为

$$y=C_1y_1^*+C_2y_2^*+C_3y_3^*$$

其中 $C_1+C_2+C_3=1$