石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

常微分方程

可降阶的高阶微分方程

主讲 ：王秋宝

目录

- $y'' = f(x)$型；
- $y'' = f(x, y')$型；
- $y'' = f(y, y')$型。

$y''=f(x)$型

此种二阶微分方程是最简单的二阶微分方程，它的特点是 y''仅是 x 的函数，只要把 y'当作新的未知函数，就得到一个一阶微分方程，即

$$(y')'=f(x)$$

方程两边连续积分两次，就能得到原方程的通解.

同理，对于方程 $(y)^{(n)}=f(x)$

只要连续积分n次，即可得到方程含有n个任意常数的通解.

例1 求方程$(y''')=\sin x$的通解.

$y''=f(x,y')$型

此种二阶微分方程的特点是方程右端不显含未知函数 y.

解法： 令 $y'=p(x)$ 则 $y''=p'(x)$

带回原方程，有 $p'=f(x,p)$

这是一个关于变量 x，p 的一阶微分方程，可以用前一节所介绍的方法求解，从而求得原方程的解.

例2 解微分方程 $y''=\dfrac{1}{x}y'+xe^x$.

$y''=f(y,y')$型

此种二阶微分方程的特点是方程右端不显含自变量 x.

解法：　令 $y' = p(y)$

利用复合函数的求导法则, 有：$y'' = \frac{dp}{dx} = \frac{dp}{dy}\frac{dy}{dx} = p\frac{dp}{dy}$

于是原方程变为 $p\frac{dp}{dy} = f(y,p)$

设它的通解为 $y' = p = \varphi(y, C_1)$

分离变量并积分，得原方程的通解为 $\int \frac{dy}{\phi(y, C_1)} = x + C_2$

例3 求微分方程 $yy'' - y'^2 = 0$ 的通解.