石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

常微分方程

一阶微分方程(3)

主讲 ：王秋宝

目录

- 全微分方程的概念；
- 全微分方程的求解；
- 积分因子；
- 内容小结。

全微分方程的概念

一阶微分方程可改写成:

$$P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0 \tag{1}$$

若存在一个可微函数 $u=u(x,y)$,使$du=P(x,y)dx+Q(x,y)dy$,

则称(1)为全微分方程.

由此可知，方程(1)为全微分方程的充要条件是:

$$\frac{\partial Q}{\partial x}=\frac{\partial P}{\partial y}$$

全微分方程求解

全微分方程的解法：寻找原函数 $u = u(x, y)$ ，则全微分方程的通解为：

$$u(x, y) = C$$

全微分方程求解

寻找原函数的方法:

法1：曲线积分法:

$$u(x,y)=\int_{(x_0,y_0)}^{(x,y)} Pdx+Qdy=\int_{x_0}^{x} P(x,y_0)dx+\int_{y_0}^{y} Q(x,y)dy$$

法2 (分项组合法)：将只含有*x*，只含有*y* 和既含*x*又含*y* 的项分别放在一起，分别凑成微分，三个微分的和即原函数.

例1 求解$(3x^2+2xy^2)dx+(2y+2x^2y)dy=0$

积分因子

若 $P(x,y)dx+Q(x,y)dy=0$ 不是全微分方程(即 $\frac{\partial Q}{\partial x}\neq\frac{\partial P}{\partial y}$)，但是 $\mu(x,y)P(x,y)dx+\mu(x,y)Q(x,y)dy=0$ 是全微分方程，则称 $\mu(x,y)$ 为原方程的积分因子.

寻求积分因子

如 $ydx - xdy = 0$ ，虽然方程本身并不是全微分方程，但是选取适当的积分因子便可将之化为全微分方程：

若选取 $\mu(x,y) = \frac{1}{y^2}$ ，则原方程化为 $\frac{ydx - xdy}{y^2} = 0$ ，即 $d(\frac{x}{y}) = 0$，为全微分方程；

例2 求解方程 $(3y^2 + y)dx - xdy = 0.$

积分银子

例3 求解方程

$$ydx+(y-x)dy=0.$$

积分因子

方法1: 方程改写为: $ydx - xdy = -ydy,$

故取$\mu = \dfrac{1}{y^2}$为方程的积分因子,由此得

$$\frac{ydx - xdy}{y^2} = -\frac{dy}{y}.$$

故方程的通解为: $\dfrac{x}{y} + \ln|y| = c.$

积分因子

方法2: 方程改写为:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{y}{x-y}=\frac{\dfrac{y}{x}}{1-\dfrac{y}{x}}$$

积分因子

方法3: 方程改写为:

$$\frac{dx}{dy}=\frac{1}{y}x-1,$$

它是以x为未知函数, y为自变量的一阶线性微分方程

内容小结

- 变量可分离方程；
- 齐次型方程；
- 一阶线性方程；
- 伯努利方程；
- 全微分方程；
- 积分因子。