石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

常微分方程

一阶微分方程(2)

主讲 ： 王秋宝

目录

- 一阶线性微分方程概念；
- 常数变易法；
- 伯努利方程。

一阶线性微分方程概念

方程 $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=Q(x) \qquad (10)$$

称为一阶线性微分方程，其中 $P(x)$ 和 $Q(x)$ 都是x的连续函数．当$Q(x)\equiv 0$时，方程(10)称为一阶线性齐次微分方程；当 $Q(x)\neq 0$ 时，方程(10)称为一阶线性非齐次微分方程．

常数变易法

先讨论一阶线性齐次微分方程 $$\frac{dy}{dx}+P(x)y=0 \qquad (11)$$

的通解．显然，方程(11)是可分离变量方程．

分离变量后，得 $$\frac{dy}{y}=-P(x)dx$$

两边积分，得 $$\ln y=-\int P(x)dx+\ln C$$

即 $$y=e^{-\int P(x)dx+\ln C}=Ce^{-\int P(x)dx} \qquad (12)$$

下面我们利用常数变易法讨论一阶线性非齐次微分方程(10)的解.

将相应的齐次方程(11)的通解中任意常数用一个待定的函数来代替，即

$$y = C(x)e^{-\int P(x)dx} \tag{13}$$

代回方程(10),整理，解得 $C'(x) = Q(x)e^{\int P(x)dx}$

两边积分，得

$$C(x) = \int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C \tag{14}$$

将上式代入(13)式，得

$$y = e^{-\int P(x)dx}\left(\int Q(x)e^{\int P(x)dx}dx + C\right) \tag{15}$$

常数变易法

例1 求方程 $\frac{dy}{dx}-\frac{2y}{x+1}=\sqrt{(x+1)^5}$ 的通解.

伯努利方程

形如 $\frac{dy}{dx}+p(x)y=q(x)y^{n}\quad(n\neq 0,1)$ 的微分方程称为伯努利方程.

解法：

两边乘 y^{-n}，有：$y^{-n}\frac{dy}{dx}+p(x)y^{1-n}=q(x)$

所以原方程的通解为：

$$y^{1-n}=e^{-\int(1-n)p(x)dx}\left[\int(1-n)q(x)e^{\int(1-n)p(x)dx}dx+C\right]$$

伯努利方程

例2. 求方程 $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}+\dfrac{y}{x}=a(\ln x)y^2$ 的通解.

解: 令 $z=y^{-1}$, 则方程变形为

$$\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}x}-\frac{z}{x}=-a\ln x$$

其通解为

$$z=e^{\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\left[\int(-a\ln x)e^{-\int\frac{1}{x}\mathrm{d}x}\mathrm{d}x+C\right]$$

$$=x\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]$$

将 $z=y^{-1}$ 代入, 得原方程通解:

$$yx\left[C-\frac{a}{2}(\ln x)^2\right]=1$$