石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

常微分方程

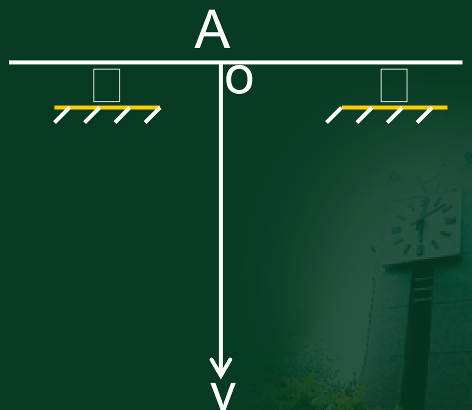
应用举例

主讲 ：王秋宝

弹性横梁振动问题

有一质量为 m 的电动机，安装在梁上 A 点，电动机开动时，产生一垂直于梁的干扰力 $p\sin\omega t$（p，ω为常数），使梁发生振动． 梁上 A 点的位移用坐标 y 表示，梁的弹性恢复力与位移 y 成正比（比例系数为 $k>0$），求 A 点的运动规律(不计阻力与重力)

解　　建立坐标系如图所示



A 点受到的力:　(1) 干扰力: $p\sin\omega t$

(2) 弹性恢复力：ky

弹性横梁振动问题

据牛顿第二定律有 $m\frac{d^2y}{dt^2}=p\sin\omega t-ky$

初始条件:

$$y(0)=0\,,\;y'(0)=0$$

即 y 满足初值问题: $m\frac{d^2y}{dt^2}=p\sin\omega t-ky \quad y(0)=0\,,\;y'(0)=0$

特征方程: $m\lambda^2+k=0$ 特征根: $\lambda_{1,2}=\pm\sqrt{\frac{k}{m}}i$

齐次方程的通解:

$$y_h(t)=c_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+c_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

弹性横梁振动问题

下面求非齐次方程的特解

$\sqrt{\dfrac{k}{m}}$：被称为固有频率

(1) 当 $\omega \neq \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 时，设非齐次方程的特解为

$$\overline{y}(t) = a\cos\omega t + b\sin\omega t$$

代入方程整理得

$$b(k-m\omega^2)\sin\omega t + a(k-m\omega^2)\cos\omega t = p\sin\omega t$$

令 $$a(k-m\omega^2) = 0$$
$$b(k-m\omega^2) = p$$

解得 $$a = 0$$
$$b = \frac{p}{k-m\omega^2}$$

弹性横梁振动问题

$$y(t)=\frac{p}{k-m\omega^2}\sin\omega t+c_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+c_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

由 $y(0)=0,\ y'(0)=0,$

$$\Rightarrow\quad c_1=0,\ c_2=-\sqrt{\frac{m}{k}}\cdot\frac{p\omega}{k-m\omega^2}$$

所以初值问题的解

$$y(t)=\frac{p}{k-m\omega^2}\left(\sin\omega t-\omega\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t\right)$$

弹性横梁振动问题

(2) 当 $\omega=\sqrt{\dfrac{k}{m}}$ 时，设非齐次方程的特解为

$$\overline{y}(t)=t(a\cos\omega t+b\sin\omega t)$$

非齐次方程的特解: $\overline{y}(t)=-\dfrac{p\omega}{2k}t\cos\omega t$

非齐次方程的通解:

$$y(t)=-\frac{p\omega}{2k}t\cos\omega t+c_1\cos\sqrt{\frac{k}{m}}t+c_2\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

由 $y(0)=0$, $y'(0)=0$ 可确定 $c_1=0$, $c_2=\dfrac{p}{2k}$

弹性横梁振动问题

$$y(t) = -\frac{p\omega}{2k}t\cos\omega t + \frac{p}{2k}\sin\sqrt{\frac{k}{m}}t$$

$$= -\frac{p\omega}{2k}t\cos\omega t + \frac{p}{2k}\sin\omega t$$

注意: 位移 $y(t)$ 的振幅为

$$\frac{p}{2k}\sqrt{1+\omega^2 t^2}$$

将随 t 的增大而无限增大，从而引起共振现象

人口预测模型

- Malthus模型

英国人口统计学家Malthus(1766—1834)在担任牧师期间,查看了教堂100多年人口出生统计资料,发现人口出生率是一个常数,于1789年在《人口原理》一书中提出了闻名于世Malthus人口模型,他的基本假设是:在人口自然增长过程中,净相对增长(出生率与死亡率之差)是常数,即单位时间内人口的增长量与人口成正比.

人口预测模型

$$N(t+\Delta t)-N(t)=rN(t)\Delta t$$

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}=rN, \\ N(t_0)=N_0. \end{cases} \longrightarrow N(t)=N_0\mathrm{e}^{r(t-t_0)}$$

人口预测模型

$$N(t)=N_0 e^{r(t-t_0)}$$

此式表明人口以指数规律随时间无限增长.

准确地反映了在1700—1961年间世界人口总数.这期间地球上的人口大约每35年翻一番,而上式断定34.6年增加一倍.

但是用此模型预测较遥远的未来地球人口总数时,发现更令人不可思议的问题: 2670年, 地球上将有36 000亿人口.如果地球表面全是陆地（事实上,地球表面还有80%被水覆盖）,我们也只得互相踩着肩膀站成两层了,这是非常荒谬的,因此,这一模型应该修改.

人口预测模型

- Logistic模型　上述模型为什么不能预测未来的人口呢？地球上的各种资源只能供一定数量的人生活，随着人口的增加，自然资源环境条件等因素对人口增长的限制作用越来越显著，如果当人口较少时，人口的自然增长率可以看作常数的话，那么当人口增加到一定数量以后，这个增长率就要随人口的增加而减小．因此，应对马尔萨斯模型中关于净增长率为常数的假设进行修改．

人口预测模型

- Logistic模型 1838年,荷兰生物数学家Verhulst引入常数用来表示自然环境条件所能容许的最大人口数,并假设净增长率随着人口的增加而减小,当接近环境允许最大人口时,净增长率趋于零,按此假定建立人口预测模型.

人口预测模型

$$
\begin{cases}
\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r\left(1-\dfrac{N}{N_m}\right)N, \\
N(t_0) = N_0 \qquad\qquad ,
\end{cases}
$$

$$
N(t) = \frac{N_m}{1+\left(\dfrac{N_m}{N_0}-1\right)\mathrm{e}^{-r(t-t_0)}}
$$

人口预测模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r\left(1-\dfrac{N}{N_m}\right)N, \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}, \qquad N(t) = \frac{N_m}{1+\left(\dfrac{N_m}{N_0}-1\right)e^{-r(t-t_0)}}$$

（1） 当 $t \to \infty$, $N(t) \to N_m$,即无论人口的初值如何,人口总数趋向于极限值 N_m ；

（2） 当 $0 < N < N_m$ 时, $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r\left(1-\dfrac{N}{N_m}\right)N > 0$ ， $N(t)$ 是时间的单调递增函数;

人口预测模型

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t} = r\left(1-\dfrac{N}{N_m}\right)N, \\ N(t_0) = N_0 \end{cases}, \qquad N(t) = \frac{N_m}{1+\left(\dfrac{N_m}{N_0}-1\right)e^{-r(t-t_0)}}$$

(3) $\dfrac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2} = r^2\left(1-\dfrac{N}{N_m}\right)\left(1-\dfrac{2N}{N_m}\right)N$，所以当 $N < \dfrac{N_m}{2}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2} > 0$，$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ 单增；当 $N > \dfrac{N_m}{2}$ 时，$\dfrac{\mathrm{d}^2N}{\mathrm{d}t^2} < 0$，$\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ 单减，即人口增长率 $\dfrac{\mathrm{d}N}{\mathrm{d}t}$ 由增变减，在 $\dfrac{N_m}{2}$ 处最大。在人口总数达到极限值一半以前是加速生长期，过这一点后，生长的速率逐渐变小，并且迟早会达到零，这是减速生长期；