石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学（下）

无穷级数

函数展开成傅立叶级数

主讲 ：范瑞琴

目录

正文

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

一、傅立叶级数


傅里叶，J.-B.-J.

设 $f(x)$ 是 $T=2l$ 的周期函数

$$f(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x\right)$$

a_0 , a_n , b_n称为傅立叶系数，其计算公式为：

$$\boxed{a_0=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{a_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\cos\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\qquad(n=1,2,3,\cdots)}$$

$$\boxed{b_n=\frac{1}{l}\int_{-l}^{l}f(x)\sin\frac{n\pi}{l}x\mathrm{d}x\qquad(n=1,2,3,\cdots)}$$

二、狄利克雷收敛定理


狄利克雷，P.G.L.

收敛定理 设 $f(x)$是$T=2l$ 的周期函数, 若$f(x)$在一个周期上满足狄利克雷条件:

(1) 连续或只有有限个第一类间断点;

(2) 在一个周期内至多有有限个极值点.

则 $f(x)$的傅立叶级数收敛,且

当x 是$f(x)$的连续点时,傅立叶级数收敛于$f(x)$,

当x 是$f(x)$的间断点时,傅立叶级数收敛于 $\frac{1}{2}[\ f(x-0)+f(x+0)\ ]$

即

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos\frac{n\pi}{l}x+b_n\sin\frac{n\pi}{l}x)=\frac{1}{2}[\ f(x-0)+f(x+0)\ ]\quad x\in(-\infty,+\infty)$$

正文

石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

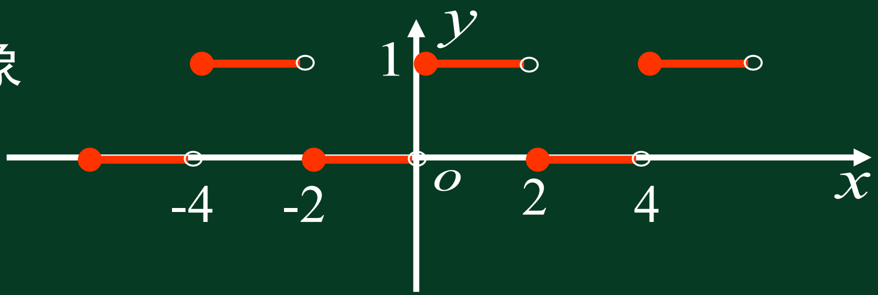
网络精品课程

例1　函数 $f(x)$ 是T=4的周期函数,

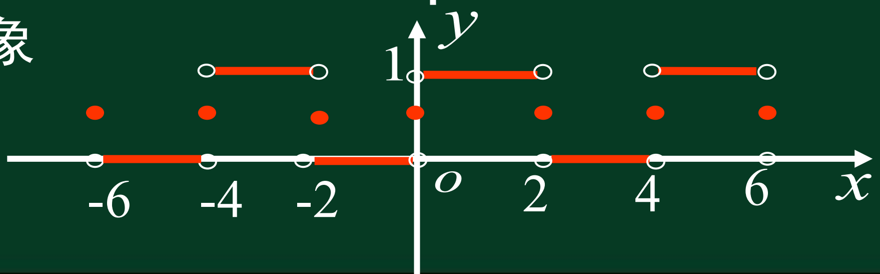
$$f(x)=\begin{cases}0 & -2\le x<0\\ 1 & 0\le x<2\end{cases}$$

将函数 $f(x)$ 展成傅立叶级数.

- $f(x)$ 的图象



- $S(x)$ 的图象

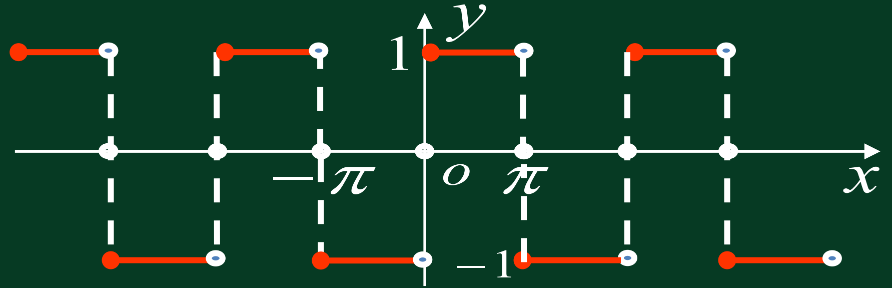


例2　设 $f(x)$ 是周期为 2π 的周期函数，它在 $-\pi$ 到 π 上的表达式为

$$f(x)=\begin{cases} -1, & -\pi \le x < 0 \\ 1, & 0 \le x < \pi \end{cases}$$

将 $f(x)$ 展成傅里叶级数.

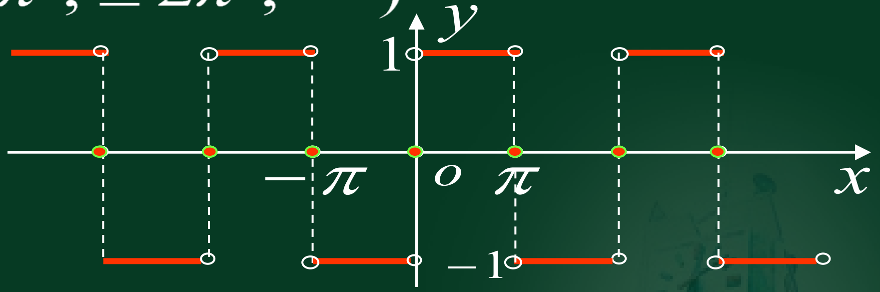
$f(x)$ 的图象



正文

$$f(x)=\frac{4}{\pi}\left[\sin x+\frac{\sin 3x}{3}+\frac{\sin 5x}{5}+\frac{\sin 7x}{7}+\frac{\sin 9x}{9}+\cdots\right]$$

$$(-\infty<x<+\infty,\ x\neq 0,\ \pm\pi,\ \pm 2\pi,\ \cdots)$$

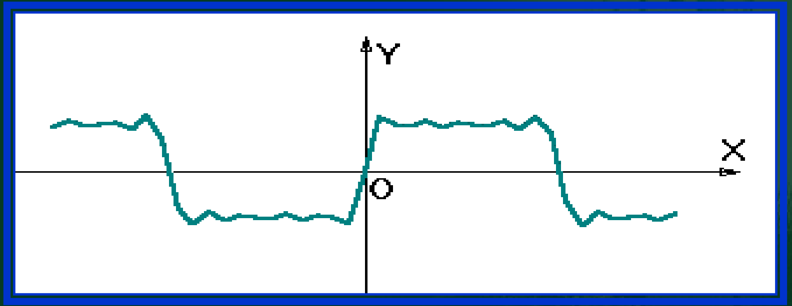


根据收敛定理可知,

$$x=k\pi\quad(k=0,\ \pm1,\ \pm2,\cdots)$$

时,傅立叶级数收敛于 $\frac{-1+1}{2}=0$

傅立叶级数的部分和逼近 $f(x)$ 的情况见右图.

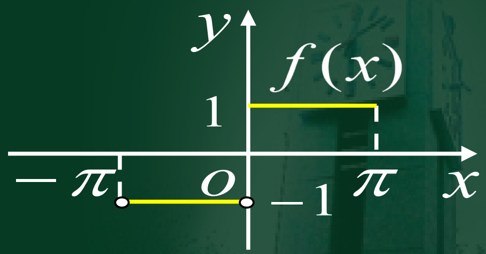


正文

例3 写出函数 $f(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0\le x\le\pi\end{cases}$ 在 $[-\pi,\pi]$ 上傅氏级数的和函数.

解

$$S(x)=\begin{cases}-1, & -\pi<x<0\\ 1, & 0<x<\pi\\ 0, & x=0\\ 0, & x=\pm\pi\end{cases}$$



小结

石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

1. 掌握傅立叶级数的公式.

2. 会求傅立叶系数.

3. 理解狄利克雷收敛定理，会使用收敛定理.