



石家庄铁道大学  
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学(下)

无穷级数

函数展开成幂级数

主讲：范瑞琴

## 一、基本公式

## 二、间接展开法



## 一、基本公式

$$\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots, -1 < x < 1.$$

$$\frac{1}{1+x} = 1 - x + x^2 - x^3 + \cdots + (-1)^n x^n + \cdots, -1 < x < 1.$$

$$e^x = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots (-\infty < x < +\infty)$$

$$\sin x = \frac{x}{1!} - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \cdots + (-1)^{n-1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!} + \cdots, x \in (-\infty, +\infty)$$

## 二、间接展开法

利用一些已知的函数展开式以及幂级数的运算性质(如:加减, 逐项求导, 逐项求积)将所给函数展开.

**例1** 将函数  $f(x)=\cos x$  展成  $x$  的幂级数.

**例2** 将函数  $f(x)=\ln(1+x)$  展成  $x$  的幂级数.

**例3** 将函数  $f(x)=\arctan x$  展成  $x$  的幂级数.

**例4** 将函数  $f(x)=\ln x$  展成  $(x-2)$  的幂级数, 并指出展开式成立的区间.

**例5** 将函数  $f(x) = \frac{1}{x^2 + 4x + 3}$  展成  $(x-1)$  的幂级数.

**练习** 求  $y = \sin^2 x$  的幂级数.

$$\begin{aligned} \text{解 } y &= \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \cos(2x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{(2n)!} (2x)^{2n} \\ &= -\frac{1}{2} \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4^n}{(2n)!} x^{2n}, \quad x \in (-\infty, +\infty) \end{aligned}$$

1. 掌握函数展开成幂级数的基本公式.
2. 会利用间接展开法将较简单的函数展开成幂级数.