石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

# 高等数学（下）

## 无穷级数

# 幂级数的和函数

主讲 ：范瑞琴

# 目录

# 正文

网络精品课程

## 一、幂级数的加、减运算

设两个幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$, 收敛半径分别为$R_1, R_2$,则

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n, \quad |x| < R, R = \min\{R_1, R_2\}.$$

# 二、幂级数的分析运算

1. 幂级数的和函数$s(x)$ 在收敛域上连续

2. 逐项求导

幂级数的和函数$s(x)$ 在收敛区间 $(-R, R)$可导，且有逐项求导公式

$$s'(x)=\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)'=\sum_{n=0}^{\infty}(a_nx^n)'=\sum_{n=1}^{\infty}n\cdot a_nx^{n-1}$$

3. 逐项求积分

幂级数的和函数$s(x)$ 在收敛区间$(-R, R)$可积，且有逐项求积分公式

$$\int_0^x s(x)\mathrm{d}x=\int_0^x\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\int_0^x a_nx^n\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n}{n+1}x^{n+1}.$$

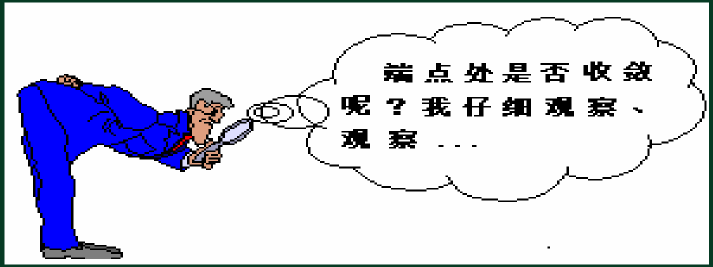
# 正文



**例** 求下列幂级数的和函数.

$$(1)\ \sum_{n=1}^{\infty} nx^{n-1};\quad (2)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n};\quad (3)\ \sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{n};\quad (4)\ \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n(n+1)}.$$

**注** 逐项求(导)积分只是不改变收敛半径, 因此分析运算应在收敛区间上进行, 在区间端点另行考虑.




- ☆幂级数通过逐项求导，逐项求积分之后得到的新幂级数在原收敛区间内仍收敛；
- ☆但在区间端点处的敛散性可能改变。因此，必须重新判定。

## 思考与练习

已知 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 在 $x = x_0$ 处条件收敛，问该级数收敛半径是多少？

答: 根据Abel定理可知, 级数在 $|x| < |x_0|$ 收敛，$|x| > |x_0|$ 时发散 .

故收敛半径为 $R = |x_0|$.

# 小结



1. 了解幂级数在其收敛区间内的性质.

2. 会求较简单的幂级数的和函数.