石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学（下）

无穷级数

幂级数的收敛域

主讲 ： 范瑞琴

目录

一、函数项级数的一般概念

定义1 设$u_1(x)$,$u_2(x)$,…,$u_n(x)$, …是定义在集合I上 的函数列,

$$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = u_1(x) + u_2(x) + \cdots + u_n(x) + \cdots$$

称为集合I上的**函数项级数** .

定义2 对于每一个确定的值$x_0 \in I$, 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 收敛，则称点x_0是函数项级数的**收敛点**；

若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x_0)$ 发散，则称点x_0是函数项级数的**发散点**；

函数项级数的所有收敛点的全体称为它的**收敛域**.

定义3 对于函数项级数收敛域内任意一点，$\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$ 都收敛，

其收敛和自然应依赖于x的取值，故其收敛和应为x的函数，

记为$s(x)$.即 $$s(x) = \sum_{n=1}^{\infty} u_n(x)$$

通常称$s(x)$为函数项级数的和函数.它的定义域就是级数的收敛域.

若将函数项级数的前n项之和(即部分和)记作为$s_n(x)$,并称

$r_n(x)=s(x)-s_n(x)$为函数项级数的余项(这里在收敛域上),于是

$$\lim_{n\to\infty} s_n(x) = s(x), \qquad \lim_{n\to\infty} r_n(x) = 0$$

正文

例如 等比级数 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$

它的收敛域是 $(-1, 1)$，当 $x \in (-1, 1)$ 时，有和函数

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

它的发散域是 $(-\infty, -1]$ 及 $[1, +\infty)$，或写作 $|x| \geq 1$.

二、幂级数的概念

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n = a_0 + a_1(x-x_0) + a_2(x-x_0)^2 + \ldots + a_n(x-x_0)^n + \ldots$$

称为 $x-x_0$ 的幂级数. 常数 $a_0, a_1, a_2, \ldots, a_n, \cdots$ 称作幂级数的系数.

特别地，当x_0=0时，有

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots$$

称作x的幂级数. 显然，关于x的幂级数在$x=0$处必收敛.

三、幂级数的收敛域、发散域的结构


阿贝尔，N. H.

定理1 (阿贝尔定理) 若$x=x_0(\neq 0)$时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$收敛，

则适合不等式$|x|<|x_0|$的一切x，均使幂级数绝对收敛；

若$x=x_0(\neq 0)$时，幂级数$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$发散，则适合不等式

$|x|>|x_0|$的一切x，均使幂级数发散.

正文

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

推论 如果幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 不是仅在一点收敛，也不是在整个数轴上都收敛，

则必有一个确定的正数 R 存在，当$|x|< R$时,幂级数绝对收敛；

当$|x|> R$时，幂级数发散；　当$|x|=R$时，幂级数可能收敛也可能发散.

结论 正数 R 通常称作幂级数的收敛半径.　$(-R, R)$称作收敛区间.

特别地,如果幂级数只在$x=0$收敛，记 $R=0$;

如果幂级数对一切x 都收敛，记$R=+\infty$.

四、幂级数的收敛半径的求法

定理2 对幂级数 $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$，记 $\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \rho$

当$\rho=0$时, $R=+\infty$； 当$\rho\neq 0$时, $R=1/\rho$； 当$\rho=+\infty$时, $R=0$.

注 1) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ 的收敛半径为 $R=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$

2) $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ 的收敛区间为 (x_0-R, x_0+R)

正文

例 求下列级数的收敛半径,收敛区间和收敛域.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n}{n}x^n$;　　(2) $\sum_{n=1}^{\infty}n^n x^n$;　　(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2n-1}{2^n}x^{2n-2}$;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{(x-2)^n}{n}$.

小结

1. 了解函数项级数收敛域及和函数的概念.

2. 了解幂级数收敛半径的概念，掌握幂级数收敛半径及收敛区间，收敛域的求法.