石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学(下)

无穷级数

交错级数

主讲 ：范瑞琴

目录

一、交错级数

设$u_n>0$，$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n = u_1 - u_2 + u_3 - u_4 + \dots + (-1)^{n-1}u_n + \dots$

则称此级数为交错级数.

二、交错级数的审敛法

定理1 (莱布尼兹定理) 如果交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n$ 满足:

(1) $u_{n+1} \le u_n \ (n=1,2,3,\ldots)$,

(2) $\lim_{n\to\infty} u_n = 0$,

则交错级数收敛,且其和$s \le u_1$, 余项r_n的绝对值$|r_n| \le u_{n+1}$.

正文

例1 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\cdots+(-1)^{n-1}\frac{1}{n}+\cdots$; 收敛

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1}{(2n-1)(2n-1)!}$; 收敛

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{\sqrt{n}}$; 收敛

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\sin\frac{1}{n}$; 收敛

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n}\frac{n}{2n+1}$. 发散

正文

例2 对于交错级数 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}u_n\ (u_n>0), u_{n+1}\le u_n$,

$\lim_{n\to\infty}u_n=0$ 是该级数收敛的__充分且必要__条件.

例3 设 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 为正项级数，则下列说法错误的是(D)

A 若部分和序列 $\{s_n\}$ 有界，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛；

B 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则一定发散于 $+\infty$；

C 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n^2$ 也收敛；

D 若 $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ 也发散.

三、条件收敛和绝对收敛

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 收敛, 则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 绝对收敛;

如果级数 $\sum_{n=1}^{\infty}|u_n|$ 发散,而 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 收敛,则称 $\sum_{n=1}^{\infty}u_n$ 条件收敛.

例如 $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ 为条件收敛.

$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{(n-1)!}$, $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{n}{10^n}$ 均为绝对收敛.

结论 绝对收敛必收敛.

例4 判定下列级数是否收敛.如果收敛, 是绝对收敛还是条件收敛?

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \frac{1}{2n+1}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin\frac{1}{n}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin na}{(\ln 3)^n}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[3]{n}}$.

小结

1. 理解交错级数的概念.

2. 会利用莱布尼兹审敛法进行交错级数敛散性的判定.

3. 会判定绝对收敛和条件收敛.