石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

# 高等数学（下）

## 无穷级数

# 比值、根值审敛法

主讲 ：范瑞琴

# 目录

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

# 一、比值审敛法

定理1 设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$, 如果 $\lim_{n\to\infty}\frac{u_{n+1}}{u_n}=\rho \quad (0\le\rho\le+\infty)$,

则所给级数：(1)$\rho<1$ 时收敛; (2) $\rho>1$ 时发散 .

注 (i)用“比值审敛法”可判定出$\rho>1$时级数发散，而且可得到 $\lim_{n\to\infty} u_n=+\infty$.

(ii)若$\rho=1$,则此审敛法失效.

# 正文

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

**例1** 判断下列级数的敛散性.

(1) $\dfrac{1}{1}+\dfrac{1}{1\cdot 2}+\dfrac{1}{1\cdot 2\cdot 3}+\cdots+\dfrac{1}{n!}+\cdots;$

(2) $\dfrac{1}{10}+\dfrac{2!}{10^2}+\dfrac{3!}{10^3}+\cdots+\dfrac{n!}{10^n}+\cdots;$

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\tan\frac{\pi}{2^{n+1}};$  (4) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^2}{3^n};$

(5) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n-1)\cdot 2n}.$

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

## 二、根值审敛法

**定理2** 设有正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$，若

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \rho \quad (0 \le \rho \le +\infty),$$

则所给级数：(1) $\rho<1$ 时收敛; (2) $\rho>1$ 时发散 .

**注** (i)用“根值审敛法”可判定出$\rho>1$时级数发散，而且可得到

$$\lim_{n\to\infty} u_n = +\infty.$$

(ii)若$\rho=1$,则此审敛法失效.

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

例2 判断下列级数的敛散性.

(1) $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^3}+\frac{1}{4^4}+\cdots+\frac{1}{n^n}+\cdots$ ;

(2) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(\ln 2n)^n}$ ; (3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{3^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ ;

(4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2^{n+(-1)^n}}$ ; (5) $\sum_{n=1}^{\infty}\left(1+\frac{2}{n}\right)^n$ .

# 小结



1. 会利用比值审敛法进行正项级数敛散性的判定.

2. 会利用根值审敛法进行正项级数敛散性的判定.