石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学（下）

无穷级数

比较审敛法

主讲 ：范瑞琴

目录

石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

一、正项级数的概念

二、比较审敛法

三、比较审敛法的极限形式

一、正项级数的概念

若级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 中的各项都是非负的(即$u_n \geq 0$)，则称此级数为**正项级数**.

定理1 正项级数收敛的**充要条件**是它的部分和数列有界.

注 (I) 一个正项级数收敛于某一非负数或发散于$+\infty$.

(II) 加或去括号都不影响正项级数的敛散性.

二、比较审敛法

定理2 给定两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$,且$u_n \leq v_n$, 则

(1) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 收敛，则 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 收敛；

(2) 若 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 发散，则 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 发散.

注 条件可改为存在 $N \in Z^+$ ，对一切 $n > N$, $u_n \leq k\,v_n$(常数 $k > 0$).

正文

结论　p-级数 $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^p}=1+\frac{1}{2^p}+\frac{1}{3^p}+\cdots+\frac{1}{n^p}+\cdots$

的敛散性(其中$p>0$)为：

当$p>1$时，级数收敛；当$0<p\le1$时，级数发散.

注　p–级数是一个重要的级数，　在解题中会经常用它作为比较对象.

正文

两个常用的比较级数: 调和级数与 p 级数

若存在 $N \in Z^{+}$,
对一切 $n \geq N$,

$$\begin{cases} (1)\ u_n \geq \dfrac{1}{n},\ \text{则} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{发散;} \\ (2)\ u_n \leq \dfrac{1}{n^p}\ (p>1),\ \text{则} \sum\limits_{n=1}^{\infty} u_n \text{收敛.} \end{cases}$$

例1 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{2n-1}$; (2) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{n \cdot 2^n}$; (3) $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \dfrac{1}{\ln n}$; (4) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{\sqrt{n(n+1)}}$.

三、比较审敛法的极限形式

定理3 给定两个正项级数 $\sum_{n=1}^{\infty} u_n, \sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 满足 $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{v_n} = l$, 则有

(1) 当 $0 < l < \infty$ 时, $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ 与 $\sum_{n=1}^{\infty} v_n$ 同时收敛或发散；

(2) 当 $l = 0$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散.} \end{cases}$$

(3) 当 $l = \infty$

$$\begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 发散} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 发散.} \\ \sum_{n=1}^{\infty} u_n \text{ 收敛} \Longrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} v_n \text{ 收敛.} \end{cases}$$

例2 判断下列级数的敛散性.

(1) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(n+1)(n+4)}$; (2) $\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{\pi}{n^2}$;

(3) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n(n^2+1)}}$; (4) $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{6^n-5^n}{7^n-6^n}$.

小结

1. 理解正项级数的概念.

2. 会利用比较审敛法进行正项级数敛散性的判定.