石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学（下）

无穷级数

函数展开成正余弦级数

主讲 ：范瑞琴

目录

一、周期延拓

二、正弦级数、余弦级数

正文

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

一、周期延拓

如果$f(x)$是仅在$[-\pi, \pi]$上定义的非周期的函数,也满足狄立克雷充分条件,$f(x)$仍可展成傅立叶级数.做法如下:

1. 将在$(-\pi, \pi]$或$[-\pi, \pi)$上定义的非周期的函数$f(x)$周期延拓为$F(x)$;

2. 将$F(x)$展开成傅立叶级数;

3. 限制$x\in[-\pi, \pi]$,$F(x)=f(x)$, 得到$f(x)$的傅立叶级数, 根据收敛定理该级数在端点$x=\pm\pi$处, 收敛于 $\frac{1}{2}[f(\pm\pi-0)+f(\pm\pi+0)]$.

正文

例1 将函数 $f(x)=\begin{cases}-x, & -\pi \le x < 0 \\ x, & 0 \le x \le \pi\end{cases}$ 展成傅立叶级数.

利用此展式可求出几个特殊的级数的和：

$$\sigma = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2};$$

$$\sigma_1 = 1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2};$$

$$\sigma_2 = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{6^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n)^2};$$

正文

二、正弦级数、余弦级数

一般说来, 一个函数的傅立叶级数既含有正弦项,又含有余弦项. 但是, 奇函数的傅立叶级数只含有正弦项，偶函数的傅里叶级数只含有常数项和余弦项.

在一个三角级数中，若只含有正弦项，则该级数称为正弦级数；若只含有常数项和余弦项，则称为余弦级数.

以 2π为周期的奇函数，它的傅里叶级数是正弦级数,傅立叶系数

$$b_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\sin nx \,\mathrm{d}x \qquad (n = 1, 2, 3, \cdots)$$

以 2π为周期的偶函数，它的傅里叶级数是余弦级数,傅立叶系数

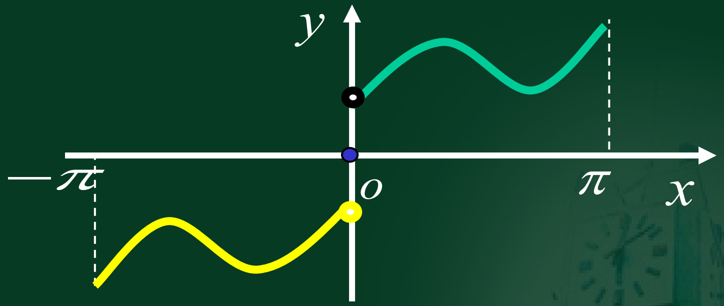
$$a_n = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} f(x)\cos nx \,\mathrm{d}x \qquad (n = 0, 1, 2, 3, \cdots)$$

正文

定义在$[0,\pi]$上的非周期的函数$f(x)$,如何展成正弦级数,余弦级数?

方法1　奇延拓 $f(x)$

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in(0,\pi] \\ 0, & x=0 \\ -f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$

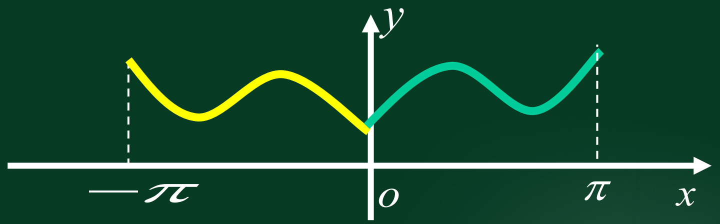


再将$F(x)$周期延拓,展成正弦级数,限制$F(x)$于$[0,\pi]$上, 就得到$[0,\pi]$上的非周期函数$f(x)$ 展开成的正弦级数.

正文

方法2　偶延拓 $f(x)$

$$F(x)=\begin{cases} f(x), & x\in[0,\pi] \\ f(-x), & x\in(-\pi,0) \end{cases}$$



再将$F(x)$周期延拓,展成余弦级数,限制$F(x)$于[0,π]上, 就得到[0,π]上的非周期函数$f(x)$ 展开成的余弦级数.

例2　函数 $f(x)=x+1$ $(0\le x\le\pi)$分别展成正弦和余弦级数.

小结

1. 掌握周期延拓.

2. 掌握奇偶延拓.

3. 了解正余弦级数的概念，会将函数展开成正余弦级数.