石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

重积分

三重积分的概念与计算（二）

主讲 ： 张少谱

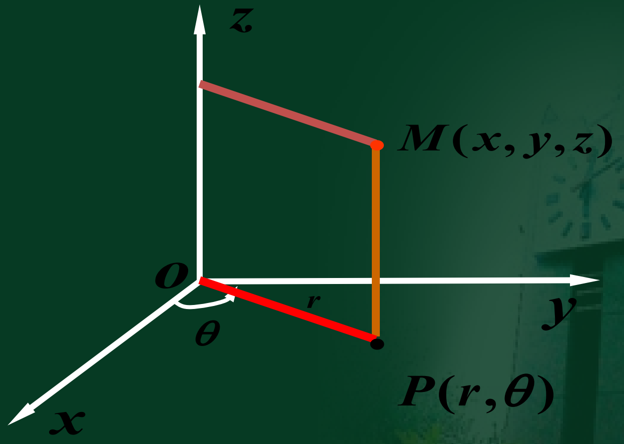
目录

- 柱面坐标系下三重积分的计算

设$M(x, y, z)$为空间内一点，并设点M在xOy面上的投影P的极坐标为 r, θ，则这样的三个数 r, θ, z 就叫点M的**柱面坐标**.

规定 $0 \le r < +\infty, \quad 0 \le \theta \le 2\pi,$

$$-\infty < z < +\infty.$$



直角坐标与柱面坐标的关系为

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = z.$$

首先将 Ω 用柱面坐标表示

$$\Omega=\{(x,y,z)\mid z_1(x,y)\le z\le z_2(x,y),\ (x,y)\in D_{xy}\}$$

$$D_{xy}=\{(x,y,)\mid \alpha\le\theta\le\beta,\quad r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\}$$

此时，**Ω 的柱面坐标表示为**

$$\Omega:\begin{cases}\alpha\le\theta\le\beta,\\ r_1(\theta)\le r\le r_2(\theta)\}\\ z_1(r\cos\theta,r\sin\theta)\le z\le z_2(r\cos\theta,r\sin\theta)\end{cases}$$

$$\therefore\quad \iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\iiint_{\Omega} f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z$$

$$=\int_{\alpha}^{\beta}d\theta\int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)}r\,\mathrm{d}r\int_{z_1(r\cos\theta,\ r\sin\theta)}^{z_2(r\cos\theta,\ r\sin\theta)}f(r\cos\theta,r\sin\theta,z)\mathrm{d}z.$$

例1 将三重积分$\iiint\limits_{\Omega} f(x^2+y^2,z)\mathrm{d}V$化为柱面坐标系下的三次积分，其中$\Omega$为介于$z=1$、$z=2$间的圆柱：$x^2+y^2\le a^2$.

例2 求三重积分$\iiint\limits_{\Omega}(x^2+y^2)\mathrm{d}V$，其中$\Omega$由$z=2-x^2-y^2$，$z=x^2+y^2$围成.

总结 同时具备两种情形，比较适合用柱面坐标计算：

(i) Ω 在坐标面上的投影区域用极坐标表示比较简单.如

圆柱体： $x^2+y^2=R^2$,

圆锥体： $z^2=a^2(x^2+y^2)$,

旋转抛物面： $z=a^2(x^2+y^2)$.

(ii) 被积函数具有以下特征:

$$f(x^2+y^2),\quad f(x^2+z^2),\quad f(y^2+z^2).$$