石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

重积分

三重积分的概念与计算（一）

主讲 ：张少谱

目录

一、三重积分的概念

定义 设$f(x,y,z)$是空间有界闭区域Ω上的有界函数, 将闭区域Ω任意分成 n 个小闭区域 $\Delta V_1, \Delta V_2, \cdots, \Delta V_n$,其中ΔV_i表示第 i 个小闭区域, 也表示它的体积, 在每个ΔV_i上任取一点(ξ_i, η_i, ζ_i) ，作和式$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i$,

如果当各小闭区域的直径中的最大值λ趋近于零时，这和式的极限存在, 且与 Ω 的分法及点 (ξ_i, η_i, ζ_i) 的取法无关，则称此极限为函数$f(x,y,z)$在闭区域Ω上的三重积分, 记为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V,$$

即 $\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i, \zeta_i)\Delta V_i.$

注 (i) 三重积分中各符号的含义及名称与二重积分的情形相似.

(ii) 在直角坐标系中, 如果用平行于坐标面的平面来划分Ω, 则体积元素 $\mathrm{d}V=\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z$,

三重积分记为

$$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y\mathrm{d}z=\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i,\zeta_i)\Delta V_i .$$

(iii) 当 $f(x,y,z)$ 在 Ω 上连续时，三重积分一定存在.

(iv) 三重积分与二重积分具有完全类似的性质.

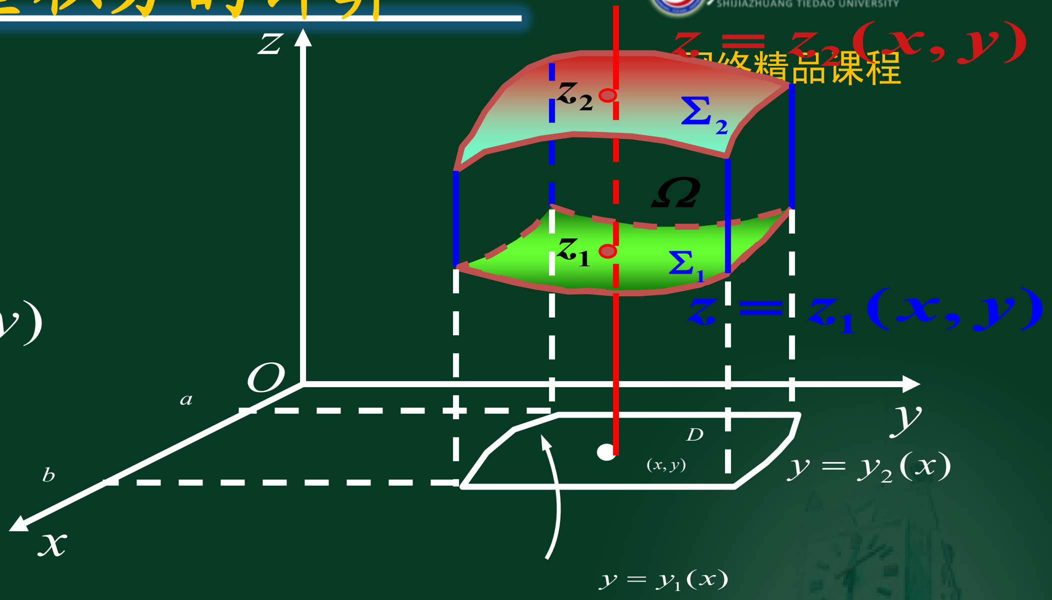
(v) 若 $f(x,y,z)$ 是 Ω 上的体密度函数，则

$$M=\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V .$$

二、直角坐标系下三重积分的计算

1.投影法(先线后面法)

$$\Omega: \begin{cases} a \le x \le b \\ y_1(x) \le y \le y_2(x) \\ z_1(x,y) \le z \le z_2(x,y) \end{cases}$$

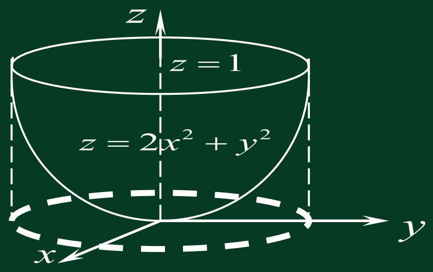


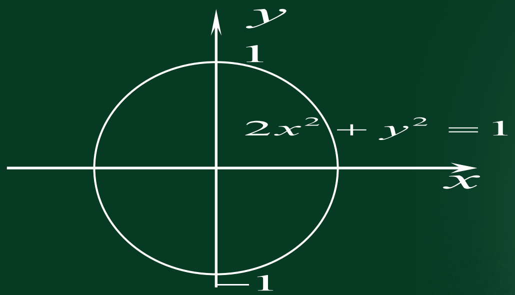
则 $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$$

$$= \iint_{D} \mathrm{d}\sigma \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z$$

$$= \int_a^b \mathrm{d}x \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \mathrm{d}y \int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} f(x,y,z)\mathrm{d}z.$$

例1 将三重积分 $I=\iiint\limits_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V$ 化为三次积分，其中积分区域Ω 由椭圆抛物面 $z=2x^2+y^2$ 与平面 $z=1$ 围成.





2. 截面法 (先面后线法)

截面法的一般步骤:

(1) 把积分区域Ω向某轴（如z轴）投影, 得投影区间$[c_1, c_2]$;

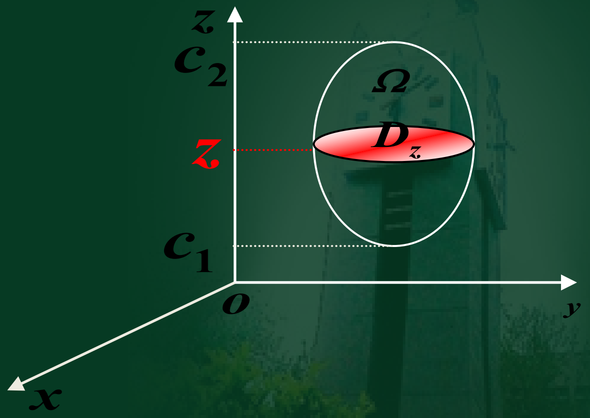
(2) 对$z \in [c_1, c_2]$, 用过z轴且平行xOy面的平面去截Ω, 得截面D_z; 即

$$\Omega = \{(x, y, z) : c_1 \le z \le c_2, (x, y) \in D_z\}$$

(3) 计算二重积分 $\iint\limits_{D_z} f(x, y, z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$

其结果为z的函数$F(z)$;

(4) 最后计算积分 $\int_{c_1}^{c_2} F(z)\mathrm{d}z$.



即 $$\iiint_{\Omega} f(x,y,z)\mathrm{d}V=\int_{c1}^{c2}\mathrm{d}z\iint_{D_z} f(x,y,z)\mathrm{d}x\mathrm{d}y=\int_{c_1}^{c_2}F(z)\mathrm{d}z.$$

注 当被积函数仅与变量z有关，且截面D_z易知时，用上式简便.

例2 计算三重积分$\iiint_{\Omega} z^2\mathrm{d}V$，其中 Ω是由椭球面 $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1$ 所成的空间闭区域.