



石家庄铁道大学
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

重积分

极坐标系下二重积分的计算

主讲：张少谱

直角坐标与极坐标的关系为 $\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \end{cases}$.

其中 r 为极径, θ 为极角.

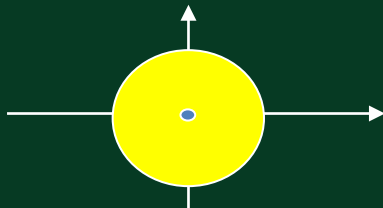
二重积分在极坐标系中的计算公式:

$$\iint_D f(x, y) d\sigma = \iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

若在极坐标系下 D^* : $\begin{cases} \alpha \leq \theta \leq \beta \\ r_1(\theta) \leq r \leq r_2(\theta) \end{cases}$

$$\iint_D f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta = \int_{\alpha}^{\beta} d\theta \int_{r_1(\theta)}^{r_2(\theta)} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr$$

例1 计算 $\iint_D e^{-x^2-y^2} dx dy$, 其中 D 是圆心在原点, 半径为 R 的闭圆.



例2 计算 $\iint_D x^2 dx dy$, 其中 D 是由圆 $x^2+y^2=1$ 和 $x^2+y^2=4$ 所围成的环形区域.

例3 计算以 $f(x, y) = \sqrt{4a^2 - x^2 - y^2}$ 为顶面以 D 为底的曲顶柱体的体积, 其中 D 是由 x 轴和半圆周 $y = \sqrt{2ax - x^2}$ 所围成的区域.

