石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

重积分

直角坐标系下二重积分的计算（一）

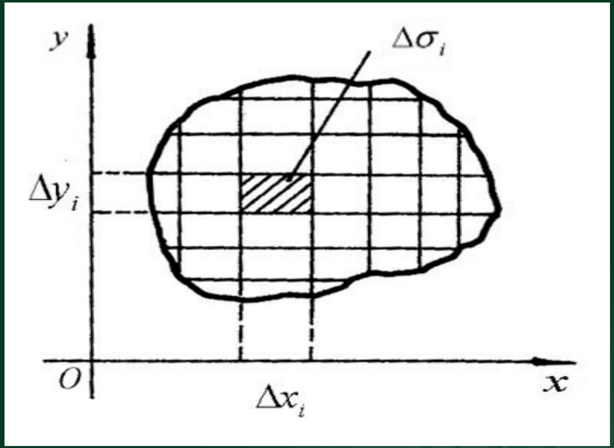
主讲 ：张少谱

目录

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

- 先y后x的二次积分
- 先x后y的二次积分



在直角坐标系下，常把面积元素**dσ**写成**dxdy**，于是二重积分可表示成

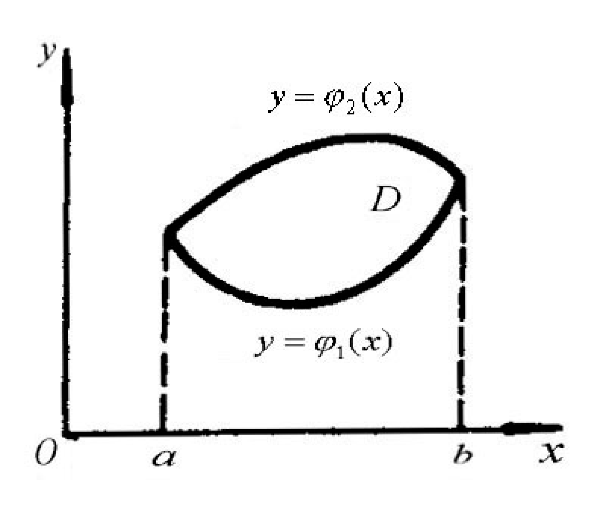
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint_D f(x,y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y.$$

一、先y后x的二次积分

石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

设$f(x,y)\geq 0$，积分区域为



$$D=\{(x,y)\mid \ a\leq x\leq b, \varphi_1(x)\leq y\leq \varphi_2(x)\ \}$$

称图示积分区域为x-型区域.

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y\right]\mathrm{d}x.$$

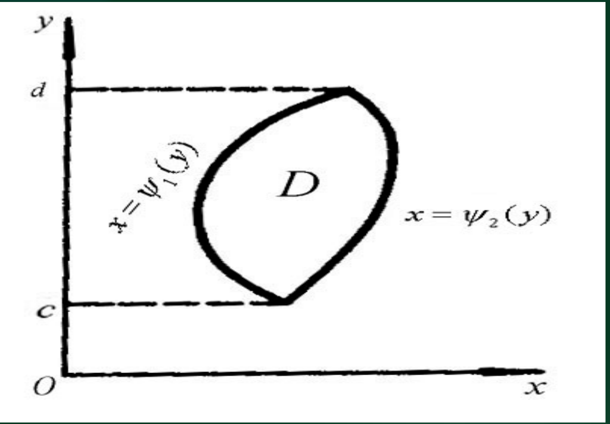
这就是直角坐标系下二重积分的计算公式，它把二重积分化为二次积分．在该类积分区域下，它是一个先对y后对x的二次积分．上面公式还常记为

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y.$$

二、先 x 后 y 的二次积分

若积分区域为

$$D=\{(x,y)\,|\,c\le y\le d,\ \psi_1(y)\le x\le \psi_2(y)\}$$



类似，可得以下公式

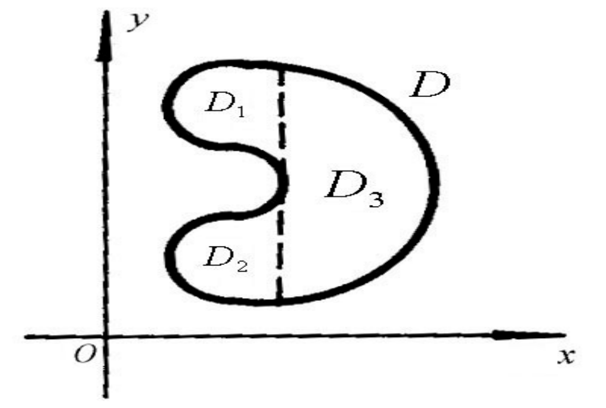
$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_c^d\left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x\right]\mathrm{d}y=\int_c^d\mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

这个二次积分称为**先对 x 后对 y 的二次积分**．图示区域称为 **y-型区域**.

若积分区域D既是x-型区域又是y-型区域，显然有

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\int_a^b \mathrm{d}x\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x,y)\mathrm{d}y=\int_c^d \mathrm{d}y\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\mathrm{d}x.$$

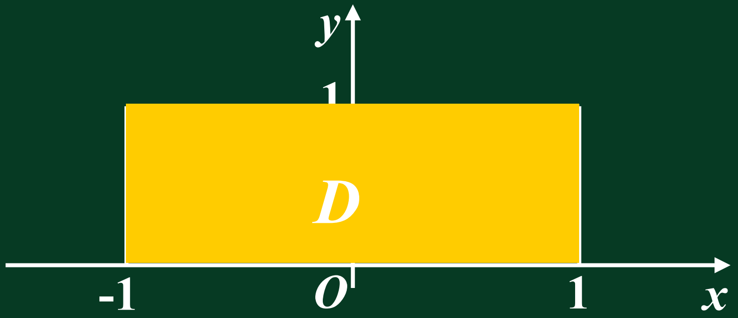
若积分区域D既不是x-型区域又不是y-型区域，此时，需用平行于x轴或y轴的直线将区域D划分成x-型区域或y-型区域．由图示，D分割成了D_1，D_2，D_3三个x-型区域．由二重积分的性质有



$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint_{D_3} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

例1 计算

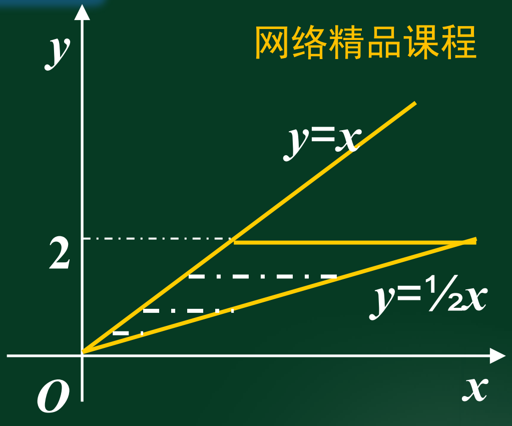
$$\iint_D (x+y+3)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,\quad D=\{(x,y)\mid -1\le x\le 1,\ \ 0\le y\le 1\ \}.$$



例2 计算二重积分$\iint\limits_D (x^2+y^2-y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$，其中$D$是由

$$y=x,\ y=\frac{1}{2}x,\ y=2$$

所围成.



注 合理选择二次积分的次序以简化二重积分的计算是我们常常要考虑的问题，其中，既要考虑积分区域的形状，又要考虑被积函数的特性.