石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

重积分

二重积分的概念与性质

主讲 ：张少谱

目录

- 本章内容概述
- 两个引例
- 二重积分的概念
- 二重积分的性质

在《高等数学·上册》第三章中，我们讨论了一元函数积分学及其应用. 本章我们将利用一元函数积分学解决多元函数积分法及应用问题. 也就是先将一元函数问题的微分法推广到多元函数问题上去，得到所谓的重积分，然后利用一元函数积分法解决重积分的计算问题.

与定积分类似，重积分的概念也是从实践中抽象出来的，是定积分的推广，其中的数学思想与定积分一样，也是一种“和式的极限”. 所不同的是：定积分的被积函数是一元函数，积分范围是一个区间；而重积分的被积函数是多元函数，积分范围是平面或空间中的一个区域.

我们将从求体积与质量等问题引入重积分的概念, 然后讨论其性质与计算. 先讲二重积分, 再讲三重积分, 讲三重积分时侧重讲计算.

在学习重积分之前, 一定要熟练地掌握定积分的基础知识与计算.

本章主要学习内容

1. 二重积分的概念与性质.
2. 二重积分的计算（直角坐标系下与极坐标系下二重积分的计算）.
3. 三重积分（三重积分的概念可以看成二重积分概念的推广，性质可以看成二重积分某些性质的推广，主要介绍直角坐标系下、柱面坐标系下三重积分的计算）.
4. 重积分的应用（采用微元法介绍重积分在几何问题中的某些应用）.

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

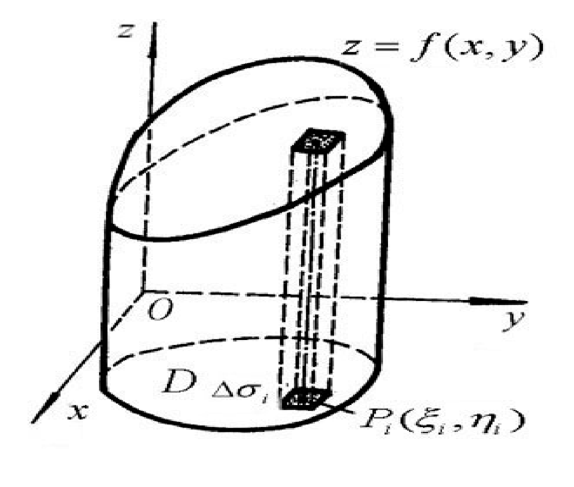
网络精品课程

二重积分的概念与性质

一、两个引例

例1 曲顶柱体的体积

所谓曲顶柱体(如图)，是指在空间直角坐标系中以曲面 $z=f(x, y)$($f(x, y)\geq 0$)为顶，以xOy平面上的有界闭区域D为底面，以区域D的边界曲线为准线而母线平行于z轴的柱面为侧面的立体.



现求其体积V.

解法类似定积分解决问题的思想：

“分割，近似，求和，取极限”

(1) 分割

用任意曲线网分D为 n 个区域: $\Delta\sigma_1, \Delta\sigma_2, \cdots, \Delta\sigma_n$ 并用相同符号表示各小区域的面积.每个小区域对应着一个小的曲顶柱体. 于是将大的曲顶柱体分成n 个小的曲顶柱体.小区域 $\Delta\sigma_i$ (i=1,2, ...,n)上任意两点间距离的最大值，称为该小区域的直径，记为d_i (i=1,2, ...,n).

(2) 近似

在 $\Delta\sigma_i$ (i=1,2, ... ,n)上任取一点 $P_i(\xi_i, \eta_i)$ ，则$f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$ 表示第i个小的曲顶柱体体积的近似值.

(3) 求和

$$V \approx \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i .$$

(4) 取极限

记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{d_i\}$ ，则λ→0时，曲线网充分细密，极限

$$\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i$$

表示曲顶柱体体积的精确值V. 即

$$V = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i, \eta_i)\Delta\sigma_i .$$

例2 平面薄片的质量

设平面薄片占据xOy平面上的有界闭区域D, 面密度$\rho(x,y)$在D上连续. 现求其质量M.

将薄片任意分成 n 个直径很小的小块,记第i个小块为$\Delta\sigma_i$，并用相同符号表示其面积(i=1,2, … ,n).

在$\Delta\sigma_i$ (i=1,2, … ,n)上任取一点$P_i(\xi_i,\eta_i)$，则$\rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$表示第$i$个小薄片质量的近似值. 于是

$$M \approx \sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

记 $\lambda = \max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i\text{的直径}\}$，则

$$M = \lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

两个问题的共性

(1) 解决问题的步骤相同：“分割, 近似, 求和, 取极限”；

(2) 所求量的结构式相同：

曲顶柱体的体积 $V=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

平面薄片的质量 $M=\lim\limits_{\lambda\to 0}\sum\limits_{i=1}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i$.

二、二重积分的概念

石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

1.定义

设函数$z=f(x, y)$在平面有界闭区域 D 上有定义，将D任意分成 n 个小区域 $\Delta\sigma_i$ (i=1,2, …) , 其中$\Delta\sigma_i$表示第i个小区域,同时也表示其面积.在 $\Delta\sigma_i$上任取一点(ξ_i,η_i)，作和

$$\sum_{i=1}^{n} f(\xi_1,\eta_i)\Delta\sigma_i .$$

记$\lambda=\max\limits_{1\le i\le n}\{\Delta\sigma_i\text{的直径}\}$，若不论区域$D$的分法如何，也不论小区域上点$(\xi_i,\eta_i)$的取法如何，当$\lambda\to 0$时，上述和式都有确定的极限$I$，则称函数 $f(x,y)$ 在D上可积，并且称极限I就是$f(x,y)$ 在D上的二重积分.记为 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma$

$$\iint\limits_D f(x,y)d\sigma = \underbrace{\lim_{\lambda\to 0}\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)\Delta\sigma_i}_{\text{积分和}}$$

积分和

$$\boxed{\iint\limits_D \underline{f(x,y)}\,\underline{\mathrm{d}\sigma}}$$

积分表达式

积分域

被积函数

面积微元

2. 二重积分存在的条件

1. 有界闭区域D上的连续函数$f(x,y)$在该区域上可积；

2. 当$f(x,y)$在区域D上有界，且只在有限个点或有限条曲线上不连续时，$f(x,y)$在区域D上可积.

3. 二重积分的几何意义

由二重积分的定义知，例1中的曲顶柱体的体积V就是曲顶$f(x,y)$在底面D上的二重积分 $\iint_D f(x,y)d\sigma$. 显然，当$f(x,y)>0$时，二重积分就是例1中所示曲顶柱体的体积V；当$f(x,y)<0$时，二重积分等于相应曲顶柱体体积的负值；若$f(x,y)$在区域D的某些部分区域上是正的，而在其它部分区域上是负的，则二重积分表示这些部分区域上柱体体积的代数和，即用xOy平面上方的柱体体积去减xOy平面下方的柱体体积.

三、二重积分的性质

1. 基本性质

性质1 (线性性质)设$f(x,y)$和$g(x,y)$在D上可积，k为常数，则

(1) $\iint\limits_D (f+g)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_D g\mathrm{d}\sigma.$

(2) $\iint\limits_D kf\mathrm{d}\sigma = k\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma.$

性质2 (对区域的可加性)设$f(x,y)$ 在D上可积且$D=D_1+D_2$,则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \iint\limits_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma + \iint\limits_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma.$$

性质3 (保号性)设$f(x,y)$和$g(x,y)$在D上可积，则

(1) 设$f(x,y)\geq 0$， $(x,y)\in D$.则 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma \geq 0.$

(2) 设$f(x,y)\geq g(x,y)$， $(x,y)\in D$.则 $\iint\limits_D f\mathrm{d}\sigma \geq \iint\limits_D g\mathrm{d}\sigma.$

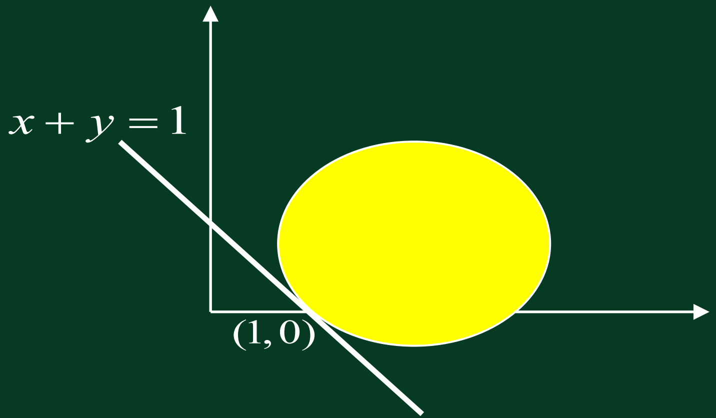
性质4 设$f(x,y)$在D上可积，则$|f(x,y)|$也在D上可积，且

$$\left|\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma\right| \leq \iint\limits_D |f(x,y)|\mathrm{d}\sigma.$$

性质5 (二重积分的中值定理)设$f(x,y)$在闭区域D上连续，则存在 $(\xi,\eta)\in D$， 使得 $\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = f(\xi,\eta)S_D.$

例1 比较二重积分$\iint\limits_D (x+y)^2 \mathrm{d}\sigma$与二重积分$\iint\limits_D (x+y)^3 \mathrm{d}\sigma$的大小，

其中 $D:(x-2)^2+(y-1)^2 \le 2.$



2. 对称性质

性质1 设积分区域D关于x轴对称， D_1为D在x轴上方的部分，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_1} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f(x,-y)=f(x,y) \\ 0 & f(x,-y)=-f(x,y) \end{cases}$$

性质2 设积分区域D关于y轴对称， D_2为D在y轴右侧的部分，则

$$\iint_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma = \begin{cases} 2\iint_{D_2} f(x,y)\mathrm{d}\sigma & f(-x,y)=f(x,y) \\ 0 & f(-x,y)=-f(x,y) \end{cases}$$

性质3 设积分区域D具有轮换对称性， 即将x和y互换，D不变(即D关于直线$y=x$对称)，则

$$\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma=\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma=\frac{1}{2}\left(\iint\limits_D f(x,y)\mathrm{d}\sigma+\iint\limits_D f(y,x)\mathrm{d}\sigma\right).$$

注 利用二重积分的对称性，可以有效地提高二重积分计算速度和准确程度，甚至可以解决很棘手的问题. 但这些结果掌握和使用比较困难，因此我们要尽可能地从二重积分的定义及几何意义上理解和使用它们，而不能死记硬背地照抄照搬.

例2 设 $D: x^2+y^2\le 2y$，函数$f(x)$连续，计算

$$I=\iint\limits_D\left[1+xyf(x^2+y^2)\right]\mathrm{d}\sigma.$$