石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

多元函数微分学及其应用

隐函数的求导法(1)

主讲 ：王秋宝

目录

- $F(x, y)=0$ 的情形；
- $F(x, y, z)=0$的情形。

$F(x, y)=0$的情形

定理1 (隐函数存在定理1) 设函数$F(x, y)$在点$P(x_0, y_0)$的某一邻域内满足:

① $F(x_0, y_0)=0$;

② $F(x, y)$在点$P(x_0, y_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数$F_x(x, y)$, $F_y(x, y)$;

③ $F_y(x_0, y_0) \neq 0$.

则方程$F(x, y)=0$在点$P(x_0, y_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个单值且具有连续导数的函数$y=f(x)$, 它满足条件$y_0=f(x_0)$, 并有

$$\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = -\frac{F_x}{F_y}$$

$F(x, y)=0$的情形

注　若③换成$F_x(x_0, y_0)\neq 0$, 则确定隐函数$x=x(y)$, 在点(x_0, y_0)可导, 且

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}y}=-\frac{F_y}{F_x}.$$

例1　验证方程 $x^2+y^2-1=0$ 在点$(0, 1)$的某邻域内能唯一确定一个单值可导且$x=0$时$y=1$的隐函数$y=f(x)$, 并求这函数的一阶和二阶导数在$x=0$的值.

例2　已知 $\ln\sqrt{x^2+y^2}=\arctan\frac{y}{x}$, 求 $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$.

$F(x, y, z)=0$的情形

定理2 (隐函数存在定理2) 设函数$F(x, y, z)$在点$P(x_0, y_0, z_0)$的某一邻域内满足:

① $F(x_0, y_0, z_0)=0$;

② $F(x, y, z)$在点$P(x_0, y_0, z_0)$的某一邻域内具有连续的偏导数F_x, F_y, F_z;

③ $F_z(x_0, y_0, z_0) \neq 0$.

则方程$F(x, y, z)=0$在点$P(x_0, y_0, z_0)$的某一邻域内恒能唯一确定一个单值连续且具有连续偏导数的函数$z=f(x, y)$, 它满足条件$z_0=f(x_0, y_0)$, 并有

$$\frac{\partial z}{\partial x}=-\frac{F_x}{F_z}, \quad \frac{\partial z}{\partial y}=-\frac{F_y}{F_z}.$$

$F(x, y, z)=0$的情形

例3 设 $x^2+y^2+z^2-4z=0$，求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial x^2}$.