石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

多元函数微分学及其应用

全微分(1)

主讲 ：王秋宝

目录

- 引例；
- 全微分的定义；
- 可微的必要条件。

引例

根据偏导数的定义, 多元函数对某个自变量的偏导数是把其余自变量视为常数, 对该自变量求导. 这就是说, 把多元函数作为一元函数来处理. 但在实际问题中, 多个自变量可以随意变化. 例如, 在理想气体的状态方程

$$V = \frac{RT}{P}$$

中, 纯粹等温和等压过程是不存在的, 真正需要考虑的是: 若自变量P和T分别取得改变量$\triangle P$和$\triangle T$时, 体积的改变量

$$\Delta V = \frac{R(T+\Delta T)}{P+\Delta P} - \frac{RT}{P}$$

有多大?

全微分的定义

设二元函数$z=f(x, y)$在点(x, y)的某邻域内有定义, 自变量x和y分别取得改变量Δx和Δy时, 称$f(x+\Delta x, y+\Delta y)-f(x, y)$为函数在点$(x, y)$对应于自变量增量$\Delta x$, Δy的全增量, 记为Δz, 即

$$\Delta z = f(x+\Delta x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

称$f(x+\Delta x, y)-f(x, y)$为函数在点(x, y)对自变量x的偏增量, 记为$\Delta_x z$, 即

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y).$$

称$f(x, y+\Delta y)-f(x, y)$为函数在点(x, y)对自变量y的偏增量, 记为$\Delta_y z$, 即

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y).$$

全微分的定义

在一元函数$y=f(x)$中, 如果函数在x_0点可导, 则函数的增量

$$\Delta y = f'(x_0)\Delta x + o(\Delta x),$$

即增量可以表示成△x的线性函数与△x的高阶无穷小量的和.

对于二元函数$z=f(x, y)$, 如果在(x, y)点$f_x(x, y)$与$f_y(x, y)$都存在, 则有

$$\Delta_x z = f(x+\Delta x, y) - f(x, y) = f_x(x, y)\Delta x + o(\Delta x);$$

$$\Delta_y z = f(x, y+\Delta y) - f(x, y) = f_y(x, y)\Delta y + o(\Delta y).$$

那么全增量△z能够用△x和△y的线性齐次式来表示吗？

全微分的定义

定义1 如果函数$z=f(x, y)$在点$P(x, y)$的某邻域内有定义, 且其全增量Δz可以表示为

$$\Delta z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y + o(\rho)$$

其中$A(x, y)$与$B(x, y)$不依赖于Δx, Δy而仅与x, y有关, $\rho=\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}$, 则称函数$z=f(x, y)$在点$P(x, y)$可微分, 将$\Delta z$的线性主部

$$A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y$$

称为函数$z=f(x, y)$在点$P(x, y)$处的全微分, 记为$\mathrm{d}z$, 即

$$\mathrm{d}z = A(x,y)\Delta x + B(x,y)\Delta y$$

若函数在某区域D内每一点处都可微分, 则称这函数在D内可微分, 或者称该函数为D内可微函数.

可微的必要条件

定理1 如果函数$z=f(x, y)$在点(x, y)可微分, 则:

(1) 函数$f(x, y)$在点(x, y)处必连续;

(2) 函数$f(x, y)$在点(x, y)处的偏导数必存在, 且

$$A(x,y)=f_x'(x,y), B(x,y)=f_y'(x,y).$$

从而 $\mathrm{d}z=f_x'\mathrm{d}x+f_y'\mathrm{d}y.$

注 (i) 由定理可知, 若$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)可微, 则其全微分等于它的两个偏微分之和. 再由可微的定义可知, $z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)可微的充要条件是

$$\lim_{(\Delta x,\Delta y)\to(0,0)}\frac{\Delta z-[f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y]}{\sqrt{(\Delta x)^2+(\Delta y)^2}}=0.$$

(ii) 函数可微必有函数的偏导数存在且连续. 但反之却不成立, 即连续与偏导数存在只是函数可微的必要而非充分条件.

例如 下面的函数在原点的两个偏导数都存在, 但不可微.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{\sqrt{x^2+y^2}}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}.$$

例如 下面的函数在原点处不连续, 偏导数存在, 但不可微.

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2}, & x^2+y^2\neq 0\\ 0, & x^2+y^2=0\end{cases}.$$