石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

多元函数微分学及其应用

偏导数(2)

主讲 ： 王秋宝

目录

- 偏导数的计算；
- 偏导数存在与连续的关系；
- 高阶偏导数的计算；
- 混合偏导数相等的条件；
- 内容小结。

偏导数的计算

从偏导数的定义可以看出,计算多元函数的偏导数并不需要新的方法,若对某一个自变量求导,只需将其他自变量当作常数,用一元函数求导法求导即可.于是,一元函数的求导公式和求导法则都可以推广到多元函数的偏导数的计算上来.

例1 求 $z = x^2 + 3xy + y^2$ 在点(1, 2)处的偏导数.

例2 设 $f(x,y,z) = x\mathrm{e}^{xyz} + (x+y)\arctan\ln(1+x^2yz)$,求 $\left.\dfrac{\partial f}{\partial x}\right|_{(1,0,1)}$.

例3 已知理想气体的状态方程$PV=RT$(R为常数),求证:

$$\frac{\partial P}{\partial V}\cdot\frac{\partial V}{\partial T}\cdot\frac{\partial T}{\partial P} = -1.$$

注 偏导数 $\dfrac{\partial u}{\partial x}$是一个整体记号,不能拆分.

偏导数的计算

例4 设 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$，求$f(x, y)$在原点的偏导数.

注 求区域分界点、不连续点处的偏导数要用定义求.

偏导数存在与连续的关系

一元函数中在某点可导, 函数在该点一定连续, 但多元函数中在某点偏导数存在, 函数未必连续.

例如 例4中, 函数 $f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy}{x^2+y^2} & (x,y)\neq(0,0)\\ 0 & (x,y)=(0,0)\end{cases}$,

在(0, 0)处 $f_x(0, 0)=f_y(0, 0)=0$, 但函数在该点并不连续.

又如 $z=\sqrt{x^2+y^2}$ 在(0, 0)连续, 但偏导数不存在.

高阶偏导数的计算

设函数$z=f(x, y)$在区域D内的两个偏导数$f_x(x, y), f_y(x, y)$的偏导数也存在, 则称它们是函数$z=f(x, y)$的二阶偏导数, 记作

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}=f_{xx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}=f_{yy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right),$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x\partial y}=f_{xy}(x,y)=\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right), \frac{\partial^2 z}{\partial y\partial x}=f_{yx}(x,y)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right).$$

其中后两个称为混合偏导数. 类似可以定义三阶以及三阶以上的偏导数. 二阶及二阶以上的偏导数统称为高阶偏导数. 高阶偏导数的概念可以直接推广到三元及三元以上的函数.

高阶偏导数的计算

例5 设 $z = x^3y^2 - 3xy^3 - xy + 1$, 求

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}, \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} \text{及} \frac{\partial^3 z}{\partial x^3}.$$

问题：具备怎样的条件才能使混合偏导数相等.

混合偏导数相等的条件

定理1 如果函数$z=f(x, y)$的两个二阶混合偏导数 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}, \dfrac{\partial^2 z}{\partial x \partial y}$ 在点(x, y)处连续, 则在点(x, y)处这两个二阶混合偏导数必相等.

例6 设 $z = xy + \dfrac{\mathrm{e}^y}{1+y^2}$, 求 $\dfrac{\partial^2 z}{\partial y \partial x}$.

内容小结

- 1. 偏导数的定义；
- 2. 偏导数的计算、偏导数的几何意义；
- 3. 高阶偏导数：高阶偏导数计算，混合偏导相等的条件.