石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

多元函数微分学及其应用

偏导数(1)

主讲 ：王秋宝

目录

- 引例；
- 偏导数的定义；
- 偏导数的几何意义。

引例

定量理想气体的压强P，体积V，热力学温度T之间的变化关系为：

$$V=\frac{RT}{P}$$

(1)等温过程：体积V为压强P的一元函数，从而它关于压强的变化率为：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}P}=-\frac{RT}{P^2}$$

引例

定量理想气体的压强P，体积V，热力学温度T之间的变化关系为：

$$V=\frac{RT}{P}$$

(2)等压过程：体积V为温度T的一元函数，从而它关于温度的变化率为：

$$\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}T}=\frac{R}{P}$$

引例

一般的研究多元函数关于一个变量的变化率，即研究多元函数在其余变量都固定的条件下关于这个变量的变化率，这即多元函数的偏导数的概念.

偏导数的定义

定义　设函数 $z = f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某一邻域内有定义，当 y 固定在 y_0，而 x 在 x_0 处取得增量 Δx 时，函数有增量：$f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)$. 如果极限

$$\lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

存在，则称此为函数在点 (x_0, y_0) 处对 x 的偏导数

偏导数的定义

石家莊鐵道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

偏导数记作：

$$f'_x(x_0, y_0),\ z'_x\big|_{(x_0,y_0)},\ \left.\frac{\partial z}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)},\text{或}\ \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

即：

$$f'_x(x_0, y_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0)}{\Delta x}$$

偏导数的定义

同样可以定义函数对y的偏导数：

$$f'_y(x_0,y_0)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x_0,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)}{\Delta y}.$$

也可记为：

$$\left.\frac{\partial z}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)},\ \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x_0,y_0)}.$$

偏导数的定义

偏导函数： 如果函数 $z=f(x,y)$在区域D内任一点处对x的偏导数都存在, 则上述极限就在D上定义了一个新函数$f_x'(x,y)$ ，称其为函数$f(x, y)$对自变量x的偏导函数, 简称偏导数. 也可记为

$$\frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial x}, z_x \text{ 或 } f_x(x,y) \text{ 等.}$$

偏导数的定义

同理可定义函数对y的偏导函数：

$$f_y'(x,y), \frac{\partial z}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial y}, z_y \text{ 或 } f_y(x,y).$$

偏导数的定义

注：偏导数的概念可以推广到二元以上的函数。

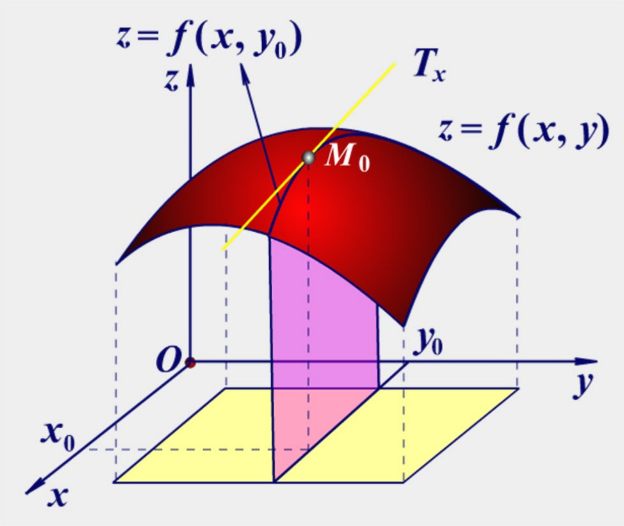
如$u=f(x, y, z)$在(x, y, z)处:

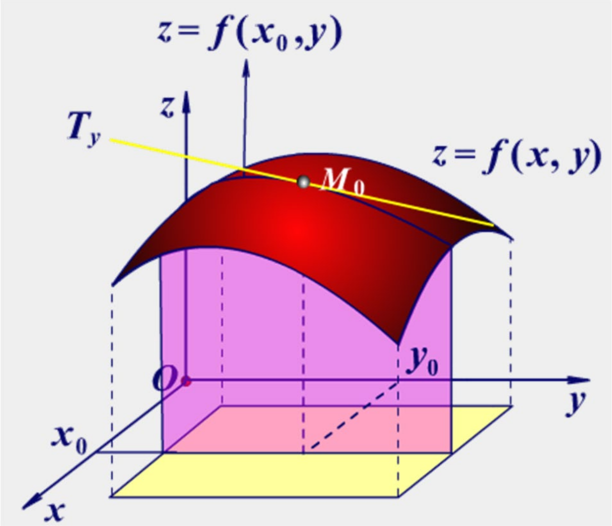
$$f_x(x,y,z)=\lim_{\Delta x\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y,z)-f(x,y,z)}{\Delta x};$$

$$f_y(x,y,z)=\lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x,y+\Delta y,z)-f(x,y,z)}{\Delta y};$$

$$f_z(x,y,z)=\lim_{\Delta z\to 0}\frac{f(x,y,z+\Delta z)-f(x,y,z)}{\Delta z}.$$

偏导数的几何意义





偏导数的几何意义

网络精品课程

偏导数 $f_x(x_0,y_0)$ 是曲面被平面 $y=y_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0Tx 对 x 轴的斜率.

偏导数 $f_y(x_0,y_0)$ 是曲面被平面 $x=x_0$ 所截得的曲线在点 M_0 处的切线 M_0Ty 对 y 轴的斜率.