



石家庄铁道大学  
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

多元函数微分学及其应用

多元函数的基本概念(2)

主讲：王秋宝





石家庄铁道大学

SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

## 目录

- ◆ 二元函数极限的概念；
- ◆ 二元函数的极限运算；
- ◆ 二元函数的连续性；
- ◆ 内容小结。

## 二元函数极限的概念

定义2 设函数  $z = f(x, y)$  定义域为  $D$ ,  $P_0(x_0, y_0)$  是其聚点,  $A$  为常数. 如对于任意给定的正数  $\varepsilon$ , 总存在正数  $\delta$ , 使得对于适合不等式

$$0 < |PP_0| = \sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} < \delta$$

的一切点  $P(x, y) \in D$ , 都有  $|f(x, y) - A| < \varepsilon$  成立, 则称  $A$  为函数  $z = f(x, y)$  当  $P \rightarrow P_0$  时的二重极限,

记为  $\lim_{\substack{x \rightarrow x_0 \\ y \rightarrow y_0}} f(x, y) = A \left( \lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} f(x, y) = A \text{ or } \lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = A \right)$ .

## 二元函数极限的概念

注 (i) 注意定义中  $P \rightarrow P_0$  的方式是任意的；  
(ii) 与一元函数的极限具有类似的性质  
(唯一性、局部保号性、四则运算法则等).





# 二元函数的极限的运算

例1 计算  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sin(x^2 y)}{x^2 + y^2}.$

例2 计算  $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{\sqrt{x^2 + y^2} - \sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{(x^2 + y^2)^{\frac{3}{2}}}.$

## 二元函数的极限的运算

(1) 选取  $P \rightarrow P_0$  的一种方式, 使得极限不存在.

通常选取某条曲线, 当动点沿此曲线趋于  $P_0$ ,

$\lim_{\substack{P \rightarrow P_0 \\ P \in L}} f(x, y)$  不存在.

(2) 找两种不同趋近方式, 使得极限不相等.

通常选取两条曲线.

# 二元函数的极限的运算



石家庄铁道大学

SHIJIAZHANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

例3 讨论下列极限的存在性

$$(1) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{x}{x^2 + y^2}; (2) \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ y \rightarrow 0}} \frac{xy}{x^2 + y^2}.$$

## 二元函数的连续性

定义2 设函数  $z = f(x, y)$  定义域为  $D$ ,  $P_0(x_0, y_0)$  是其聚点, 如果  $\lim_{P \rightarrow P_0} f(P) = f(P_0)$ , 则称此函数在点  $P_0$  处是连续的。

如果函数在点  $P_0$  处不连续, 则称  $P_0$  是函数的间断点.

若函数在区域  $D$  内每一点都连续, 则称函数在此区域上连续.



## 二元函数的连续性

例4 讨论函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$

在  $(0, 0)$  点处的连续性.

例5 讨论函数  $f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{x^2 + y^2}, & x^2 + y^2 \neq 0 \\ 0, & x^2 + y^2 = 0 \end{cases}$

在  $(0, 0)$  点处的连续性.

## 二元函数的连续性

注 (i)类似定义三元以及三元以上函数的连续性；  
(ii)一元函数中关于连续函数的运算法则，对于多元函数仍适用，因此多元连续函数的和、差、积、商(分母不为零)仍连续，多元连续函数的复合函数也连续.

## 二元函数的连续性

### 性质1 (最大值和最小值定理)

有界闭区域 $D$ 上的多元连续函数, 在 $D$ 上至少取得它的最大值和最小值各一次.

### 性质2 (有界性定理)

有界闭区域 $D$ 上的多元连续函数在 $D$ 上有界.

### 性质3 (介值定理)

有界闭区域 $D$ 上的多元连续函数至少取得介于其最大值和最小值之间的每一个值至少一次.



## 内容小结

- ◆ 平面点集的有关概念；
- ◆ 多元函数的概念；
- ◆ 多元函数的极限概念，及简单函数极限的求法，判断多元函数极限不存在的方法；
- ◆ 多元函数的连续性，初等函数的连续性。