石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

多元函数微分学及其应用

多元函数的极值(1)

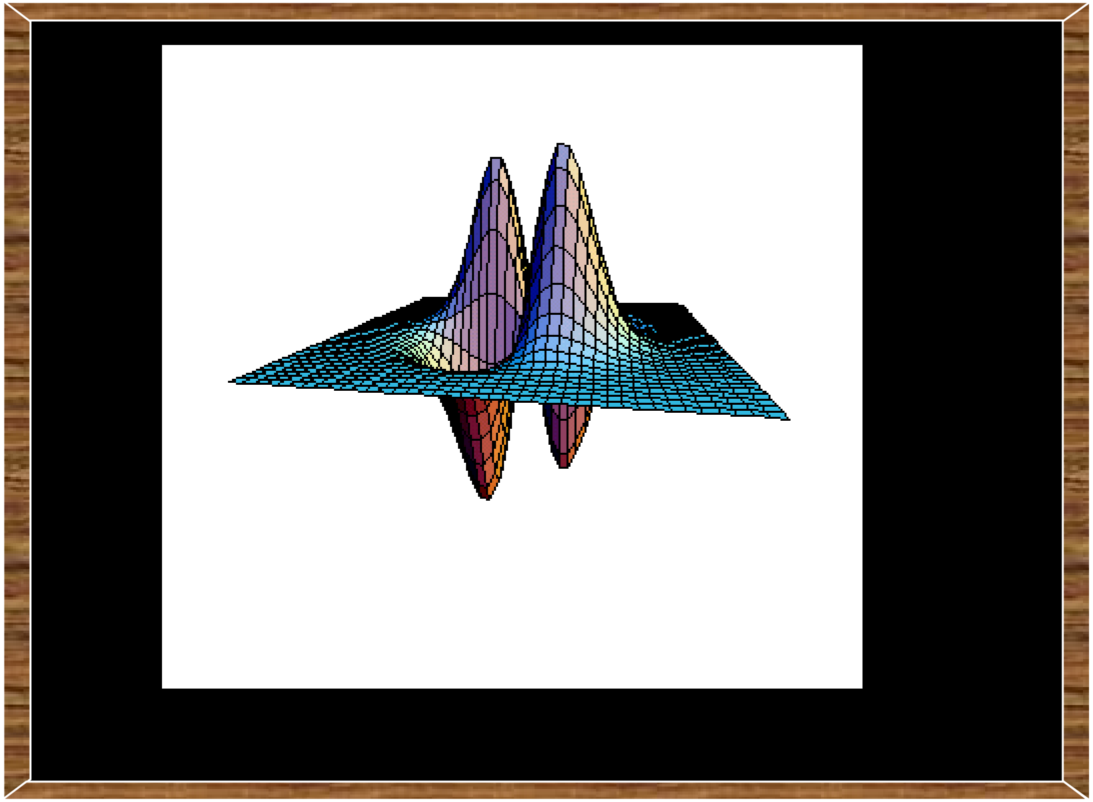
主讲 ：王秋宝

目录

- 引例；
- 二元函数极值的定义；
- 二元函数极值的必要条件；
- 二元函数极值的充分条件；
- 多元函数极值的计算。

引例

观察二元函数 $z=-\dfrac{xy}{e^{x^2+y^2}}$ 的图形

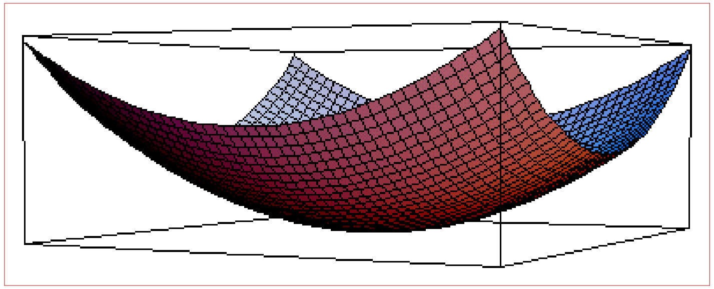


二元函数极值的定义

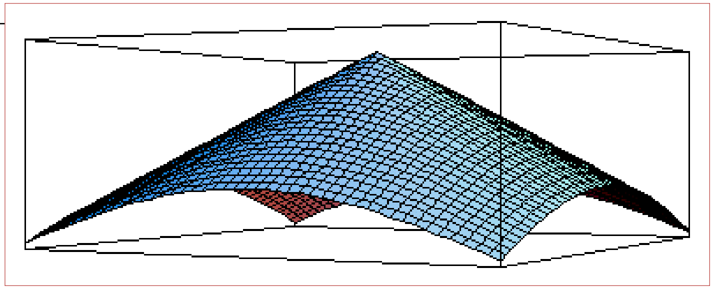
定义　设函数 $z=f(x, y)$ 在点 (x_0, y_0) 的某邻域内有定义. 对于该邻域内异于(x_0, y_0)的点(x, y): 若满足不等式 $f(x, y)<f(x_0, y_0)$，则称函数在(x_0, y_0)有极大值 $f(x_0, y_0)$；若满足不等式 $f(x, y)>f(x_0, y_0)$, 则称函数在 (x_0, y_0) 有极小值 $f(x_0, y_0)$. 极大值、极小值统称为极值. 使函数取得极值的点称为极值点.

二元函数极值的定义

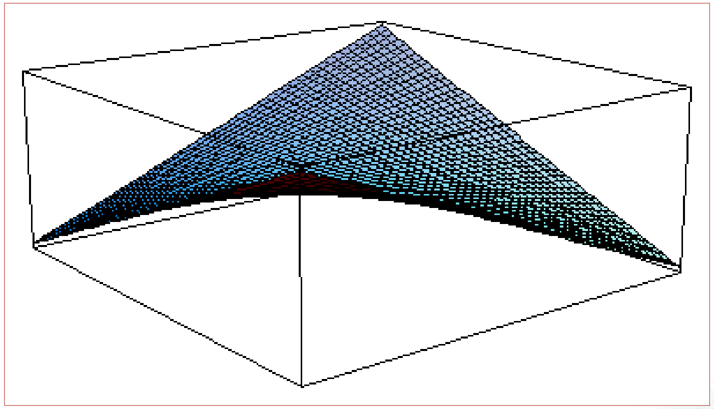
函数 $z = 3x^2 + 4y^2$
在 (0,0) 处有极小值.



函数 $z = -\sqrt{x^2 + y^2}$
在 (0,0) 处有极大值.



函数 $z = xy$
在 (0,0) 处无极值.



二元函数极值的必要条件

定理1 (必要条件) 设函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)具有偏导数, 且在点(x_0, y_0) 处有极值, 则它在该点的偏导数必然为零:

$$f_x(x_0, y_0)=0,\ f_y(x_0, y_0)=0.$$

仿照一元函数, 凡能使一阶偏导数同时为零的点, 均称为函数的驻点.

注 驻点不一定是极值点.

例如, 点$(0, 0)$是函数$z=xy$的驻点, 但不是极值点.

二元函数极值的充分条件

定理2 (充分条件) 设函数$z=f(x, y)$在点(x_0, y_0)的某邻域内连续, 有一阶及二阶偏导数, 又$f_x(x_0, y_0)=0$, $f_y(x_0, y_0)=0$. 令 $A=f_{xx}(x_0, y_0)$, $B=f_{xy}(x_0, y_0)$, $C=f_{yy}(x_0, y_0)$, 则 $f(x, y)$ 在 (x_0, y_0)处:

(1) 当$AC-B^2>0$ 时有极值, 且当$A<0$ 时有极大值, 当$A>0$ 时有极小值.

如何判定驻点是否为极值点？

(2) 当$AC-B^2<0$ 时没有极值.

(3) 当$AC-B^2=0$ 时可能有极值, 也可能没有极值, 还需另作讨论.

二元函数极值的充分条件

注 求函数$z=f(x, y)$极值的一般步骤:

第一步: 解方程组$f_x(x, y)=0$, $f_y(x, y)=0$, 得驻点;

第二步: 对于每一个驻点, 求出二阶偏导数的值A, B, C;

第三步: 定出$AC-B^2$的符号, 再判定是否是极值.

多元函数极值的计算

例1 求 $z = x^3 + y^3 - 9xy$ 的极值.

例2 求由方程 $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y - 4z - 10 = 0$ 确定的函数 $z=f(x, y)$ 极值.