石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

课程名称

高等数学下

方向导数与梯度(2)

主讲 ：王秋宝

目录

- 梯度的定义；
- 梯度的计算；
- 梯度的几何意义；
- 内容小结。

梯度的定义

定义1 设函数$z=f(x, y)$在平面区域D内具有一阶偏导数, 则对于每一点$P(x, y)\in D$, 都可定出一个向量

$$\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j},$$

该向量称为函数$z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 的梯度, 记为

$$\mathbf{grad}f(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}=(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}).$$

梯度的计算

设$\vec{l}^{\,0}=\cos\alpha\,\vec{i}+\cos\beta\,\vec{j}$是方向 $\vec{l}$上的单位向量, 由方向导数公式知

$$\frac{\partial f}{\partial l}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\alpha+\frac{\partial f}{\partial y}\cos\beta=\left(\frac{\partial f}{\partial x},\frac{\partial f}{\partial y}\right)\cdot(\cos\alpha,\cos\beta)$$

$$=\mathbf{grad}f(x,y)\cdot\vec{l}^{\,0}=|\mathbf{grad}f(x,y)|\cos\theta,$$

其中 θ 为 **grad**$f(x,y)$与 $\vec{l}^{\,0}$的夹角, 当 $\cos\theta=1$ 时, $\frac{\partial f}{\partial l}$ 有最大值.

梯度的计算

结论: 函数在某点的梯度是这样一个向量, 它的方向与取得最大方向导数的方向一致, 而它的模为方向导数的最大值. 梯度的模为

$$|\mathbf{grad} f(x,y)|=\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

当 $\frac{\partial f}{\partial x}$ 不为零时, x轴到梯度的转角的正切为

$$\tan\theta=\left.\frac{\partial f}{\partial y}\middle/\frac{\partial f}{\partial x}\right..$$

梯度的计算

若三元函数$u=f(x, y, z)$在空间区域G内具有一阶连续偏导数,则对于每一点$P(x, y, z)\in G$, 都可定义一个向量(梯度),

$$\mathbf{grad}f(x,y,z)=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{\boldsymbol{i}}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{\boldsymbol{j}}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{\boldsymbol{k}}.$$

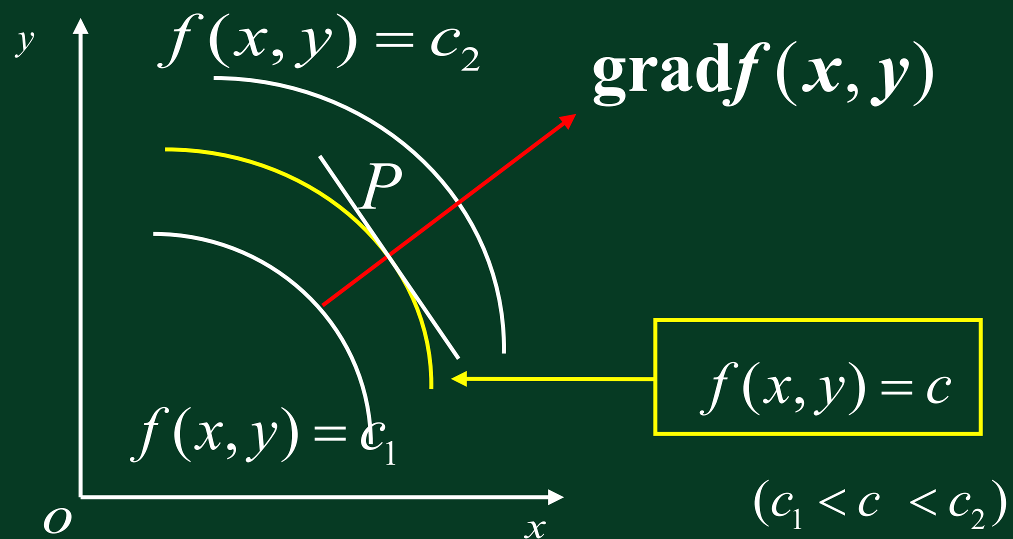
类似于二元函数, 该向量方向与取得最大方向导数的方向一致, 其模为方向导数的最大值.

例1 求函数 $u=x^2+2y^2+3z^2+3x-2y$ 在点(1, 1, 2)处的梯度, 并问在哪些点处梯度为零.

梯度的几何意义

在几何上$z=f(x,y)$表示一个曲面，曲面被平面$z=c$所截得曲线

$$\begin{cases} z = f(x,y) \\ z = c \end{cases},$$ 该曲线在xoy面上投影如图



注　函数在点P的梯度方向与点P的等高线$f(x,y)=c$在这点的法线的一个方向相同，且从数值较低的等高线指向数值较高的等高线，而梯度的模等于函数在这个法线方向的方向导数.

内容小结

- 1. 方向导数的概念(注意方向导数与一般所说偏导数的区别）；
- 2. 梯度的概念(注意梯度是一个向量)；
- 3. 方向导数与梯度的关系.