



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

课程名称

高等数学下

方向导数与梯度(1)

主讲：王秋宝

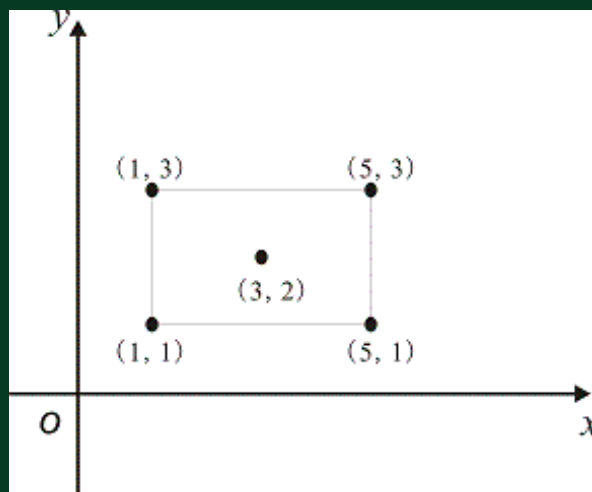
目录

- 引例；
- 方向导数定义；
- 方向导数计算。



引例

一块长方形的金属板, 四个顶点的坐标是 $(1,1)$, $(5,1)$, $(1,3)$, $(5,3)$. 在坐标原点处有一个火焰, 它使金属板受热. 假定板上任意一点处的温度与该点到原点的距离成反比. 在 $(3,2)$ 处有一个蚂蚁, 问这只蚂蚁应沿什么方向爬行才能最快到达较凉快的地点?

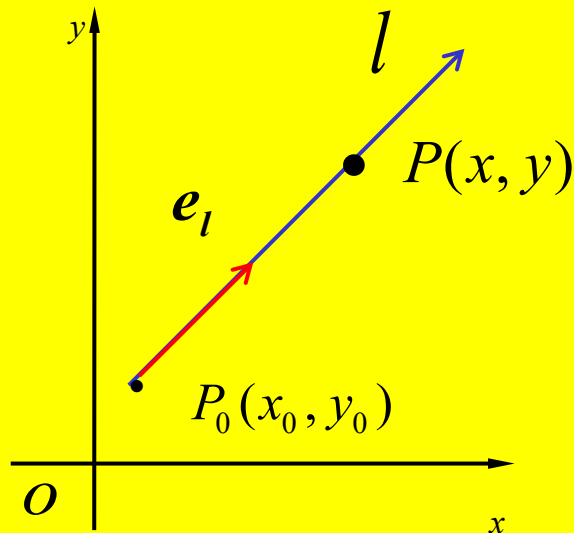


问题的实质: 应沿由热变冷变化最骤烈的方向(即梯度方向)爬行.

方向导数定义

由偏导数的定义知, $\frac{\partial z}{\partial x}$ 是 $z=f(x, y)$ 沿 x 轴方向的变化率, $\frac{\partial z}{\partial y}$ 是 $z=f(x, y)$ 沿 y 轴方向的变化率.

问题: 讨论 $z=f(x, y)$ 在一点 $P_0(x_0, y_0)$ 沿某一方向 l 的变化率.



定义1 设函数 $z=f(x, y)$ 在点 P_0 的某一邻域 $U(P_0)$ 内有定义, \vec{l} 为非零向量, 其方向角为 α 和 β , 若极限

$$\lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{\rho}$$

存在, 则称该极限为函数 $z=f(x, y)$ 在点 P_0 沿方向 \vec{l} 的方向导数, 记为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{P_0} = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \cos \beta) - f(x_0, y_0)}{\rho}.$$

注 (i) 方向导数的几何意义: 方向导数 $\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_{P_0}$ 就是函数 $z=f(x, y)$ 在点 P_0 沿方向 \vec{l} 的变化率.

(ii) 依定义, 函数 $z=f(x, y)$ 在点 P_0 处的偏导数存在时, 函数 $f(x, y)$ 在点 P_0 沿着 x 轴正向、 y 轴正向的方向导数分别为 f_x, f_y ; 沿着 x 轴负向、 y 轴负向的方向导数是 $-f_x, -f_y$; 反之不一定成立. 如 $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ 在原点处沿任何方向的方向导数都存在, 但偏导数却不存在.

(iii) 类似可得三元函数方向导数的定义, 对于三元函数 $u=f(x, y, z)$, 它在空间一点 $P(x_0, y_0, z_0)$ 沿着方向 \vec{l} 的方向导数可定义为

$$\left. \frac{\partial f}{\partial l} \right|_P = \lim_{\rho \rightarrow 0^+} \frac{f(x_0 + \rho \cos \alpha, y_0 + \rho \cos \beta, z_0 + \rho \cos \gamma) - f(x_0, y_0, z_0)}{\rho},$$

其中 α, β, γ 为方向 \vec{l} 的方向角.

方向导数的计算

定理1 (方向导数存在的充分条件) 如果函数 $z=f(x, y)$ 在点 $P(x, y)$ 是可微分的, 则函数沿任意方向 \vec{l} 的方向导数都存在, 且有

$$\frac{\partial f}{\partial l} = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta,$$

其中 α, β 为 \vec{l} 的方向角.

注 三元函数 $u=f(x, y, z)$ 在点 $M(x, y, z)$ 处的方向导数

$$\frac{\partial u}{\partial l} = \frac{\partial u}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial u}{\partial y} \cos \beta + \frac{\partial u}{\partial z} \cos \gamma.$$

方向导数的计算

例1 求函数 $z = xe^{2y}$ 在点 $P(1, 0)$ 处沿从点 $P(1, 0)$ 到点 $Q(2, -1)$ 的方向的方向导数.

例2 求函数 $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ 在点 $(1, 1)$ 沿与 x 轴方向夹角为 α 的方向射线 \vec{l} 的方向导数. 并问在怎样的方向上此方向导数有: (1) 最大值; (2) 最小值; (3) 等于零?

例3 设 \vec{n} 是曲面 $2x^2 + 3y^2 + z^2 = 6$ 在点 $P(1, 1, 1)$ 处的指向外侧的法向量, 求函数

$$u = \frac{1}{z}(6x^2 + 8y^2)^{\frac{1}{2}}$$

在此处沿方向 \vec{n} 的方向导数.