石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学下

多元函数微分学及其应用

微分法在几何上的应用(1)

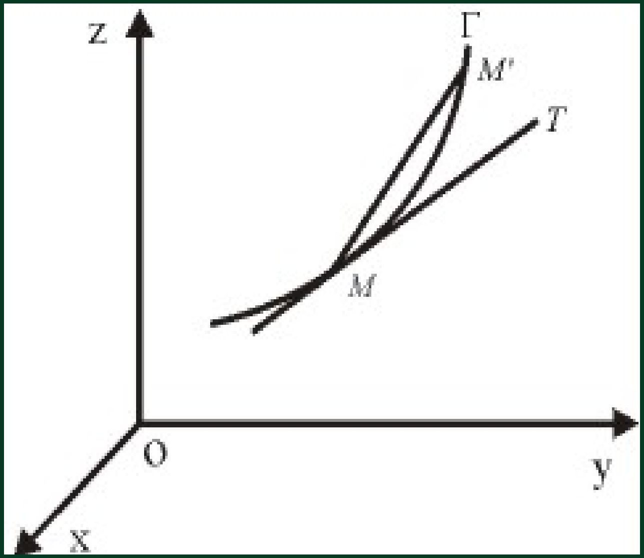
主讲 ：王秋宝

目录

- 空间曲线的切线与法平面的概念；
- 参数方程的情形；
- 一般式方程的情形。

空间曲线切线与法平面的概念

设在空间曲线Γ上有一个定点M, 在其邻近处取Γ上另一点M'并作割线MM'. 令M'沿Γ趋近M. 那么割线的极限位置MT就是曲线在点M的切线(如图); 切线的方向向量称为曲线在点M处的切向量. 过点M与切线垂直的平面称为曲线在该点的法平面.



参数方程的情形

设曲线由 $x=\varphi(t), y=\psi(t), z=\omega(t)$ 给出，t_0 对应其上点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$. 若在 t_0 处 φ,ψ,ω 可导，且 $(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0))\neq\mathbf{0}$. 则点 M_0 处的切向量为

$$\boldsymbol{\tau}=(\varphi'(t_0),\psi'(t_0),\omega'(t_0)).$$

点 M_0 处的切线方程为

$$\frac{x-x_0}{\varphi'(t_0)}=\frac{y-y_0}{\psi'(t_0)}=\frac{z-z_0}{\omega'(t_0)}.$$

点 M_0 处的法平面方程为

$$\varphi'(t_0)(x-x_0)+\psi'(t_0)(y-y_0)+\omega'(t_0)(z-z_0)=0.$$

参数方程的情形

注 若空间曲线方程为: $\begin{cases} x = x \\ y = \phi(x) \\ z = \psi(x) \end{cases}$, x_0 对应其上点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$

则点 M_0 处的切线方程为

$$\frac{x - x_0}{1} = \frac{y - y_0}{\phi'(x_0)} = \frac{z - z_0}{\psi'(x_0)},$$

点 M_0 处的法平面方程为

$$(x - x_0) + \phi'(x_0)(y - y_0) + \psi'(x_0)(z - z_0) = 0.$$

例1 求曲线 $\Gamma : x = \int_0^t e^u \cos u du,\ y = 2\sin t + \cos t,\ z = 1 + e^{3t}$ 在 $t=0$ 处的切线和法平面方程.

一般式方程的情形

空间曲线方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$,

在点 $M_0(x_0,y_0,z_0)$ 切向量 $\boldsymbol{\tau}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ F_x & F_y & F_z \\ G_x & G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}$,

切线方程为 $$\frac{x-x_0}{\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{y-y_0}{\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}}=\frac{z-z_0}{\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0}},$$

法平面方程为

$$\begin{vmatrix} F_y & F_z \\ G_y & G_z \end{vmatrix}_{M_0}(x-x_0)+\begin{vmatrix} F_z & F_x \\ G_z & G_x \end{vmatrix}_{M_0}(y-y_0)+\begin{vmatrix} F_x & F_y \\ G_x & G_y \end{vmatrix}_{M_0}(z-z_0)=0.$$

一般式方程的情形

例2 求曲线 $x^2+y^2+z^2=6, x+y+z=0$ 在点**(1,-2,1)**处的切线及法平面方程.