多元函数微分学及其应用

多元函数的基本概念(1)

主讲 ：王秋宝

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

高等数学下

目录

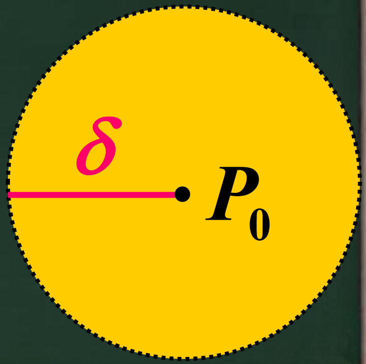
- 平面点集的有关概念；
- 二元函数的定义；
- 二元函数的图形。

平面点集的有关概念

1. 邻域

设$P_0(x_0, y_0)$是xoy平面上的一个点,$\delta > 0$，与点$P_0(x_0, y_0)$距离小于δ的点$P(x, y)$的全体称为**点P_0的δ邻域**，记为$U(P_0,\delta)$，即

$$U(P_0,\delta)=\left\{(x,y) \mid \sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2}<\delta\right\}.$$



平面点集的有关概念

1. 邻域

类似地可定义**点P_0的去心 δ 邻域** $\mathring{U}(P_0,\delta)$，即

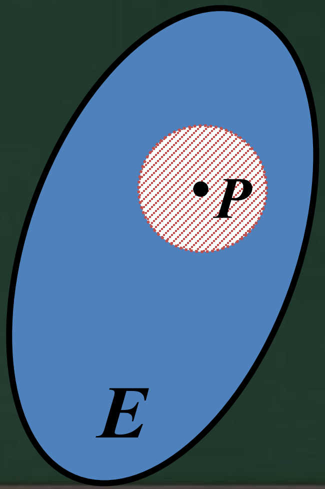
$$\mathring{U}(P_0,\delta)=\{P \mid 0<|PP_0|<\delta\}.$$

平面点集的有关概念

2. 区域

(1) 内点、外点、边界点

如果存在点P的某一邻域$U(P)\subset E$，则称P为E的**内点**.

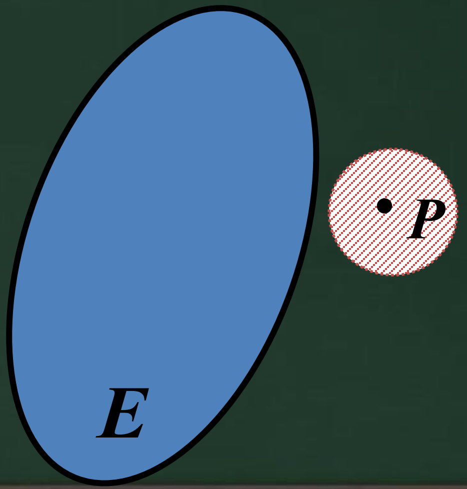


平面点集的有关概念

2. 区域

(1) 内点、外点、边界点

如果存在点P的某一邻域$U(P)\cap E=\Phi$，则称P为E的外点.

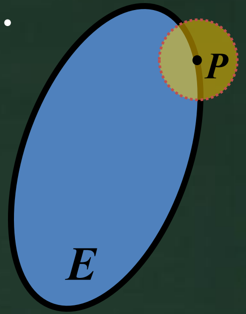


平面点集的有关概念

2. 区域

(1) 内点、外点、边界点

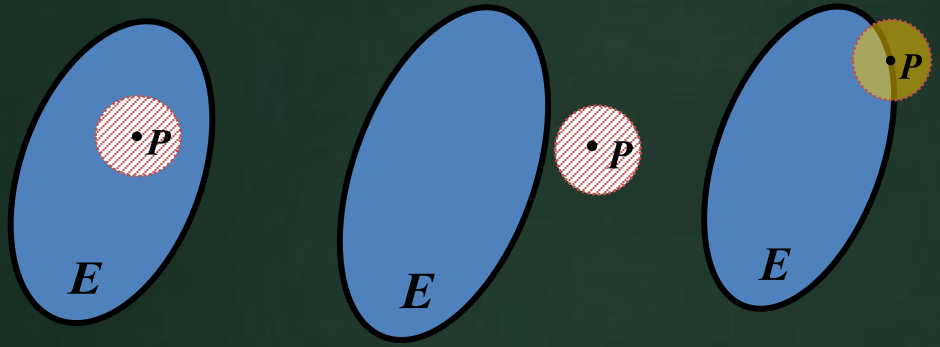
如果点P的任意邻域内既有属于E的点，也有不属于E的点，则称P为E的**边界点**. E的边界点的全体称为E的边界，记作∂E.



平面点集的有关概念

2. 区域

(1) 内点、外点、边界点



注：E的内点必属于E, E的外点必不属于E,

E的边界点可能属于E, 也可能不属于E.

平面点集的有关概念

2. 区域

(2) 聚点、孤立点

如果在点P的任一去心邻域$\mathring{U}(P)$内总有E中的点, 则称P为E的**聚点**.

平面点集的有关概念

2. 区域

(2) 聚点、孤立点

如果点$P \in E$, 存在P的某去心邻域$\mathring{U}(P)$,使得$\mathring{U}(P) \cap E = \Phi$, 则称$P$为$E$的**孤立点**.

平面点集的有关概念

2. 区域

(2) 聚点、孤立点

注: 聚点可以属于E, 也可以不属于E.

孤立点属于E, 且必为边界点.

$\{(x,y) \mid 0 < x^2 + y^2 \le 1\}$, $(0,0)$ 是聚点但不属于集合.

$\{(x,y) \mid x^2 + y^2 = 1\}$ 边界的点是聚点也属于集合.

平面点集的有关概念

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

高等数学下

2. 区域

(3) 开区域及闭区域

如果点集E的点都是内点, 则称E为**开集**;

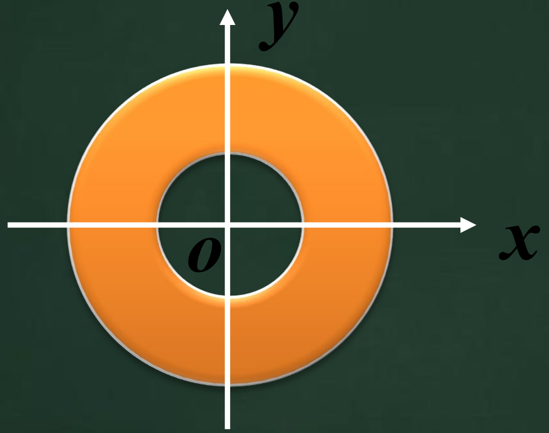
如果点集E的补集是开集, 则称E为**闭集**.

平面点集的有关概念

2. 区域

(3) 开区域及闭区域

例 $E_1 = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 4\}$ 为开集.



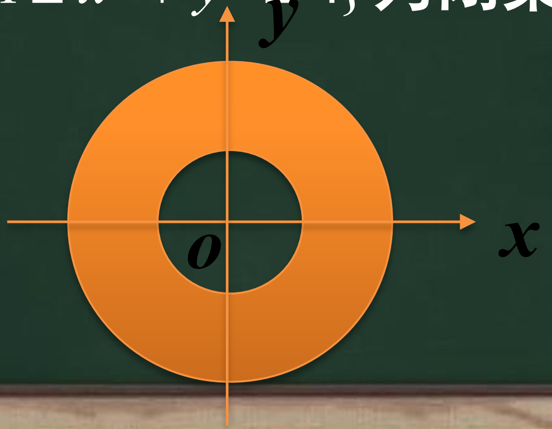
平面点集的有关概念

2. 区域

(3) 开区域及闭区域

例 $E_1=\{(x,y)\,|\,1<x^2+y^2<4\}$ 为开集.

$E_2=\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$ 为闭集.

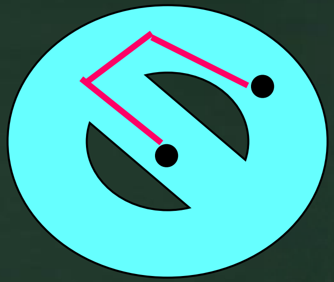


平面点集的有关概念

2. 区域

(3) 开区域及闭区域

如果对于点集D内任何两点, 都可用一条完全属于D的折线连接起来, 则称D是**连通**的.



平面点集的有关概念

2. 区域

(3) 开区域及闭区域

连通的开集称为**开区域**， 简称**区域**.

开区域连同它的边界一起称为**闭区域**.

平面点集的有关概念

2. 区域

(3) 开区域及闭区域

例 $\{(x,y)\,|\,1 < x^2 + y^2 < 4\}$ 为区域.

$\{(x,y)\,|\,1 \le x^2 + y^2 \le 4\}$ 为闭区域.

平面点集的有关概念

2. 区域

(3) 开区域及闭区域

对于点集E, 如果存在正数M, 使一切点与某一定点A之间的距离$|AP|$不超过M, 即$|AP|\le M$对一切$P\in E$成立, 则称E为有界点集, 否则称为无界点集.

平面点集的有关概念

2. 区域

(3) 开区域及闭区域

例 $\{(x,y)\,|\,1\le x^2+y^2\le 4\}$ 有界闭区域.

$\{(x,y)\,|\,x+y>0\}$ 无界开区域.

平面点集的有关概念

3. n维空间

设n为取定的自然数, 称n元数组 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ 的全体为n维空间, 而每个n元数组$(x_1, x_2, \cdots, x_n)$称为n维空间中的一个点,

数x_i称为该点的第i个坐标.

平面点集的有关概念

3. n维空间

注 (i) n维空间的记号为 R^n.

(ii) n维空间中两点间距离公式:

设两点为 $P(x_1, x_2, \cdots, x_n), Q(y_1, y_2, \cdots, y_n)$, 则:

$$|PQ| = \sqrt{(y_1 - x_1)^2 + (y_2 - x_2)^2 + \cdots + (y_n - x_n)^2}$$

二元函数的定义

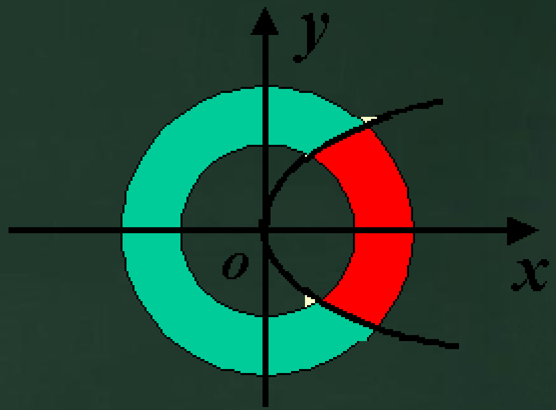
定义1　设D是平面上的一个非空点集, 如果对于每个点$P(x,y) \in D$, 变量z按照一定的法则总有确定的值和它对应, 则称z是变量x, y的二元函数, 记为$z=f(x,y)$ (或记为$z=f(P)$) .

类似地可定义三元及三元以上函数.

当$n \geq 2$时，n元函数统称为多元函数.

二元函数的定义

例1 求 $f(x,y)=\dfrac{\arcsin(3-x^2-y^2)}{\sqrt{x-y^2}}$ 的定义域.



二元函数的图形

设函数$z=f(x,y)$的定义域为D, 称点集

$$\{(x,y,z)\,|\,z=f(x,y),(x,y)\in D\}$$

为二元函数的图形.

通常二元函数的图形是一张空间曲面.

二元函数的图形