石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学（下）

空间解析几何

空间曲线与曲面

主讲 ： 范瑞琴

目录

正文

一、空间曲面及其方程

1. 曲面方程的概念

引例 求到两定点$A(1,2,3)$ 和$B(2,-1,4)$等距离的点的轨迹方程.

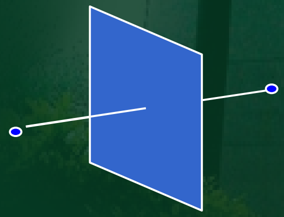
解 设轨迹上的动点为$M(x,y,z)$，则$|AM|=|BM|$，即

$$\sqrt{(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2}=\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2+(z-4)^2}$$

化简得 $2x-6y+2z-7=0$ **说明** 动点轨迹为线段 AB 的垂直平分面.

显然在此平面上的点的坐标都满足此方程,

不在此平面上的点的坐标不满足此方程.



正文

定义 如果曲面 S 与方程 $F(x, y, z) = 0$ 有下述关系:

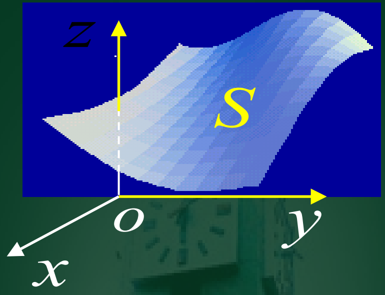
(1) 曲面 S 上的任意点的坐标都满足此方程;

(2) 不在曲面 S 上的点的坐标不满足此方程,

则 $F(x, y, z) = 0$ 叫做曲面 S 的方程,

曲面 S 叫做方程 $F(x, y, z) = 0$ 的图形.

$$F(x, y, z) = 0$$



两个基本问题:

(1) 已知一曲面的几何形状时, 求曲面的方程.

(2) 已知曲面的方程时，研究它所表示的几何形状 (必要时需作图).

正文

例1 求动点到定点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 距离为 R 的轨迹方程.

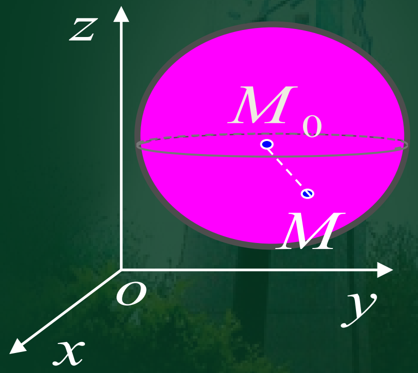
解 设轨迹上动点为 $M(x, y, z)$, 依题意 $|M_0M| = R$

即 $$\sqrt{(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2} = R$$

故所求方程为 $(x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2 = R^2$

特别,当M_0在原点时,球面方程为 $x^2+y^2+z^2=R^2$

$z = \pm\sqrt{R^2-x^2-y^2}$ 表示上(下)球面 .



正文

例2 研究方程 $x^2+y^2+z^2-2x+4y=0$表示怎样的曲面.

解 配方得 $(x-1)^2+(y+2)^2+z^2=5$

此方程表示：球心为 $M_0(1,-2,0)$，半径为 $\sqrt{5}$ 的球面.

说明 如下形式的三元二次方程 $(A\neq 0)$

$$A(x^2+y^2+z^2)+Dx+Ey+Fz+G=0$$

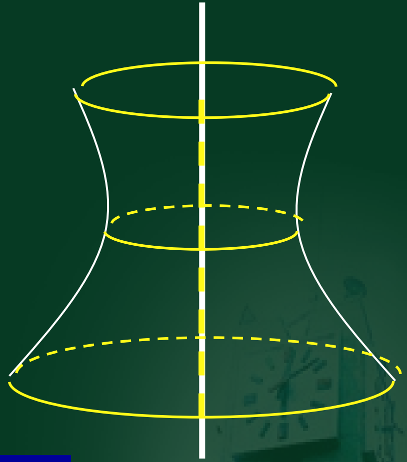
都可通过配方研究它的图形.其图形可能是一个球面, 或点.

2. 旋转曲面

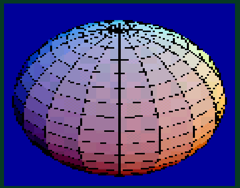
定义 一条平面曲线绕其平面上一条定直线旋转一周，

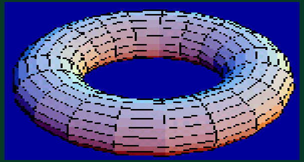
所形成的曲面叫做旋转曲面.该定直线称为旋转轴.

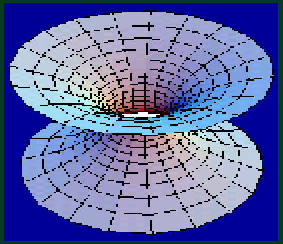
这条曲线称为旋转曲面的母线.

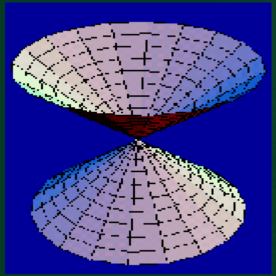


例如









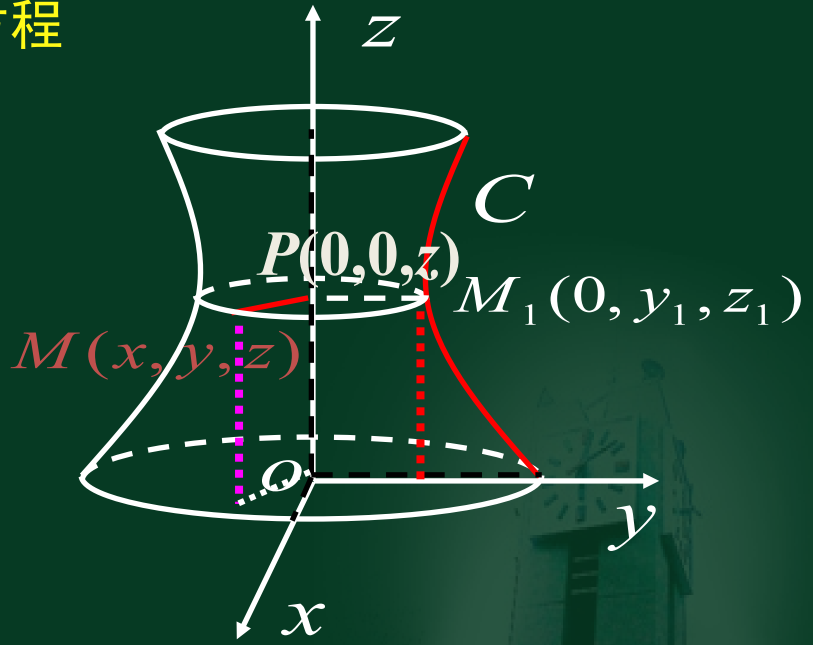
正文

建立yoz面上曲线C 绕 z 轴旋转所成曲面的方程

给定 yoz 面上曲线 C:　　　$f(y,z)=0$

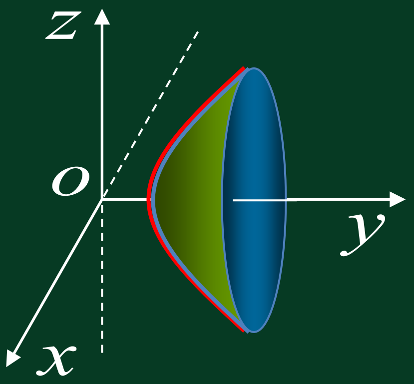
旋转曲面方程为

$$f(\pm\sqrt{x^2+y^2},z)=0$$



正文

思考 当yoz 面上曲线 C 绕 y 轴旋转时，方程如何？



$$C: f(y,z)=0$$

$$f(y, \pm\sqrt{x^2+z^2})=0$$

类似地，xoy坐标面上的已知曲线 $C: f(x,y)=0$绕 y 轴和 x 轴旋转一周的旋转曲面方程分别为

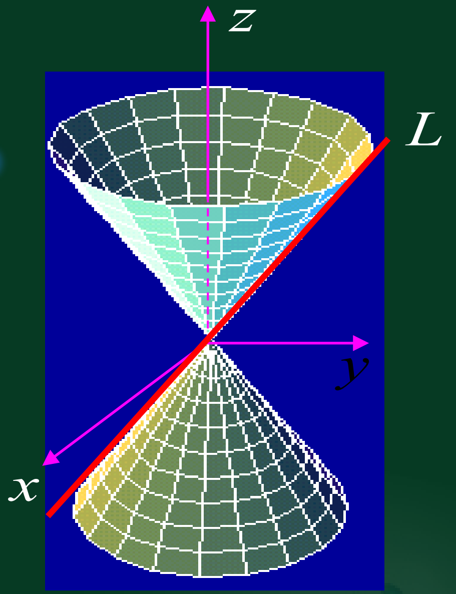
$$f\left(\pm\sqrt{x^2+z^2}, y\right)=0. \qquad f\left(x, \pm\sqrt{y^2+z^2}\right)=0.$$

正文

例3 yoz面上直线$z=ky$绕z轴旋转一周所得的

旋转曲面是 $z^2 = k^2(x^2 + y^2)$

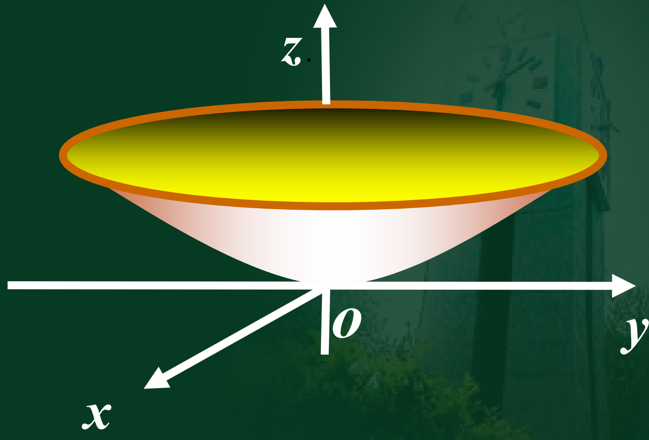
------圆锥面方程



例4 在zox面上抛物线$z=x^2$绕z轴旋转一周所得的

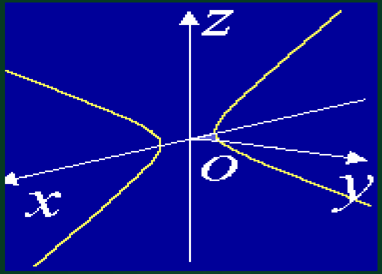
旋转曲面是 $z = x^2 + y^2$

------旋转抛物面方程



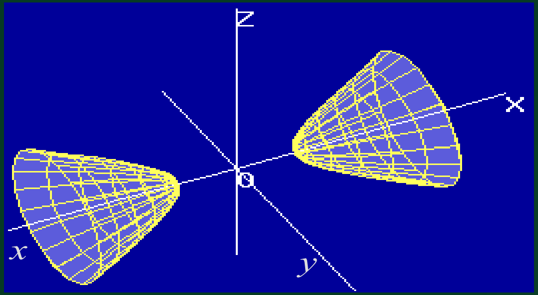
正文

例5 求坐标面 xoz 上的双曲线 $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$ 分别绕 x轴和 z 轴旋转一周所生成的旋转曲面方程.

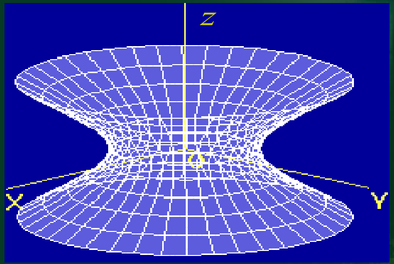


解 绕 x 轴旋转所成曲面方程为

$$\frac{x^2}{a^2}-\frac{y^2+z^2}{c^2}=1$$



绕 z 轴旋转所成曲面方程为 $\dfrac{x^2+y^2}{a^2}-\dfrac{z^2}{c^2}=1$



这两种曲面都叫做旋转双曲面.

3. 柱面

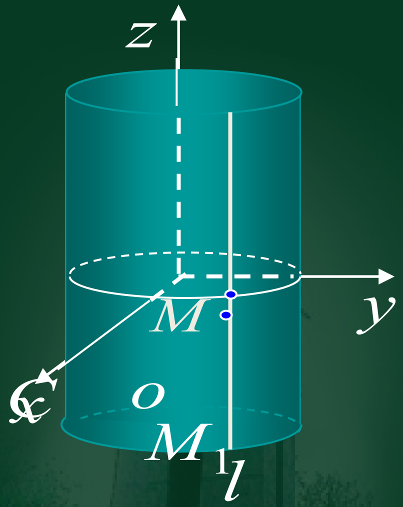
引例 分析方程 $x^2+y^2=R^2$ 在空间直角坐标系中表示怎样的曲面 .

解 在 xoy 面上, $x^2+y^2=R^2$ 表示圆C,

在圆C上任取一点 $M_1(x,y,0)$, 过此点作

平行 z 轴的直线 l, 对任意 z, 点 $M(x,y,z)$

的坐标也满足方程 $x^2+y^2=R^2$

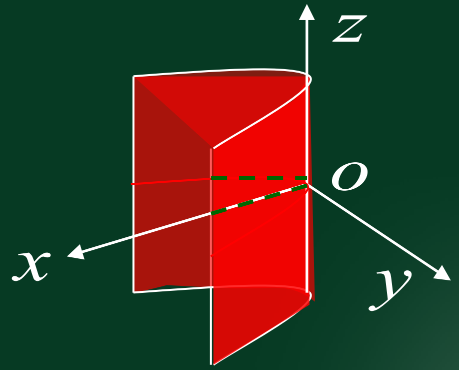


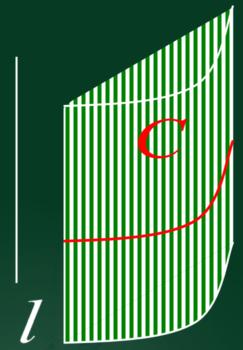
沿曲线C平行于 z 轴的一切直线所形成的曲面称为圆柱面.

其上所有点的坐标都满足此方程, 故在空间 $x^2+y^2=R^2$ 表示**圆柱面**.

正文

定义 平行定直线并沿定曲线 C 移动的直线 l 形成的曲面叫做柱面. C 叫做准线, l 叫做母线.



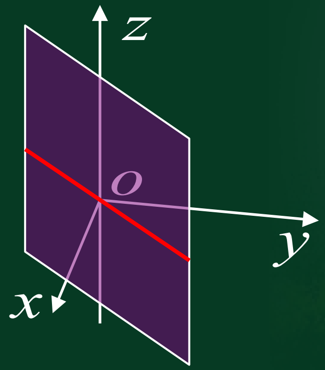


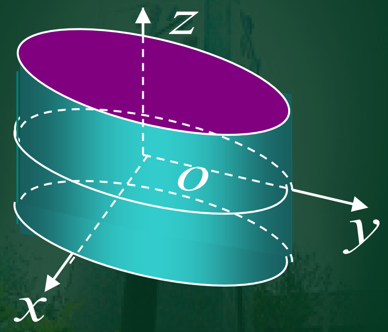
- $y^2 = 2x$ 表示抛物柱面,

母线平行于 z 轴;准线为xoy 面上的抛物线.

- $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$

表示母线平行于z 轴的椭圆柱面.





- $x - y = 0$ 表示母线平行于

z 轴的平面. (且 z 轴在平面上)

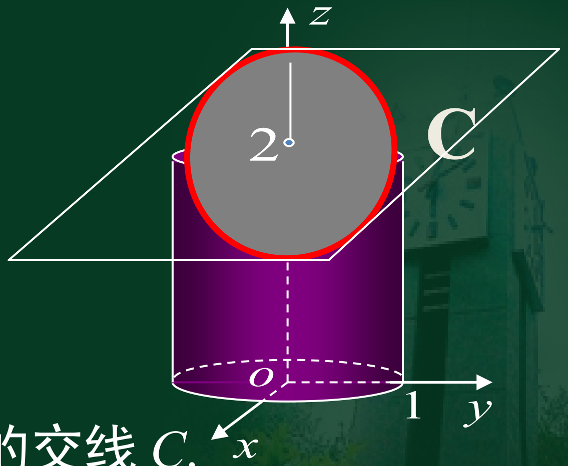
二、空间曲线及其方程

1. 空间曲线的一般方程

空间曲线可视为两曲面的交线,

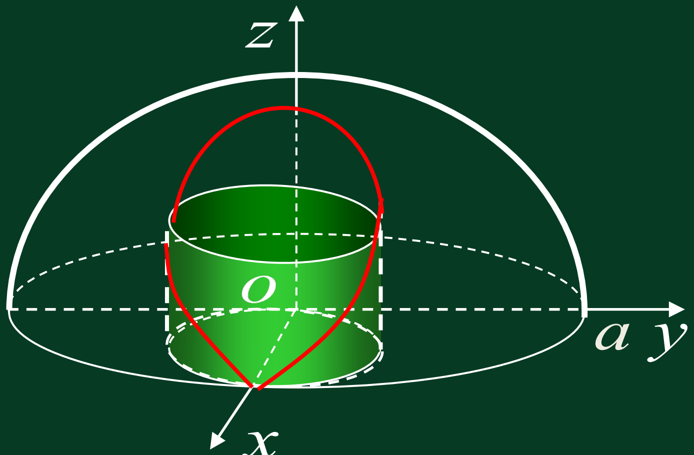
其一般方程为方程组 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

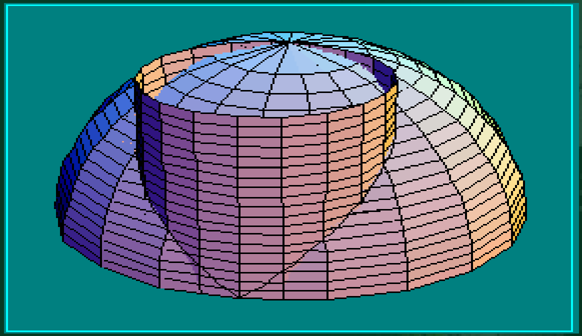
例如,方程组 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ 2x+3z=6 \end{cases}$ 表示圆柱面与平面的交线 C.



正文

又如, 方程组 $\begin{cases} z=\sqrt{a^2-x^2-y^2} \\ x^2+y^2-ax=0 \end{cases}$ 表示上半球面与圆柱面的交线C.





正文

石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY
网络精品课程

2. 空间曲线的参数方程

将曲线C上的动点坐标x, y, z表示成参数t的函数:

$$\begin{cases} x = x(t) \\ y = y(t) \\ z = z(t) \end{cases}$$

称它为空间曲线的参数方程.

正文

例6 将下列曲线化为参数方程表示:

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ 2x + 3z = 6 \end{cases}$$

解 根据第一方程引入参数，得所求为

$$\begin{cases} x = \cos t \\ y = \sin t \\ z = \dfrac{1}{3}(6 - 2\cos t) \end{cases} \qquad (0 \le t \le 2\pi)$$

正文

3. 空间曲线在坐标面上的投影

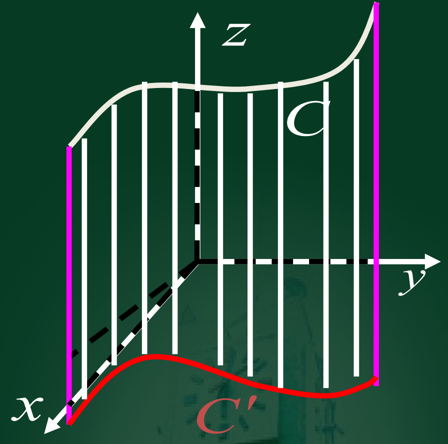
设空间曲线 C 的一般方程为 $\begin{cases} F(x,y,z)=0 \\ G(x,y,z)=0 \end{cases}$

消去 z 得**投影柱面** $H(x,y)=0$,

则 C 在 xoy 面上的投影曲线 C' 为 $\begin{cases} H(x,y)=0 \\ z=0 \end{cases}$

消去 x 得 C 在 yoz 面上的投影曲线方程 $\begin{cases} R(y,z)=0 \\ x=0 \end{cases}$

消去 y 得 C 在 zox 面上的投影曲线方程 $\begin{cases} T(x,z)=0 \\ y=0 \end{cases}$



正文

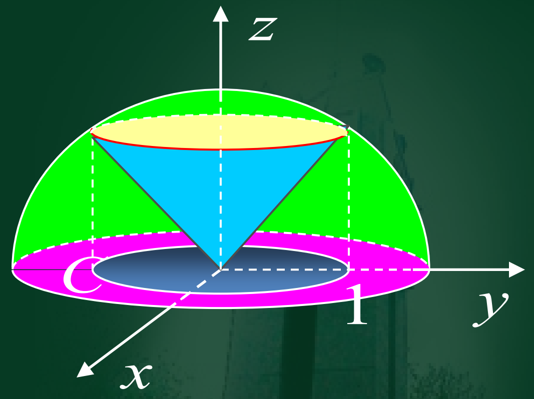
如,上半球面 $z=\sqrt{4-x^2-y^2}$ 和锥面 $z=\sqrt{3(x^2+y^2)}$

所围的立体在 xoy 面上的投影区域为:二者交线在 xoy 面上的投影曲线所围之域.

二者交线 $C:\begin{cases} z=\sqrt{4-x^2-y^2} \\ z=\sqrt{3(x^2+y^2)} \end{cases}$

在 xoy 面上的投影曲线 $\begin{cases} x^2+y^2=1 \\ z=0 \end{cases}$

所围圆域: $x^2+y^2\le 1,\ z=0.$



小结

1. 理解空间曲面方程.

2. 理解空间曲线方程.