石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学（下）

空间解析几何

空间直线及其方程

主讲 ： 范瑞琴

目录

一、空间直线方程

二、线线间的关系

三、线面间的关系

正文

一、空间直线方程

1. 对称式方程

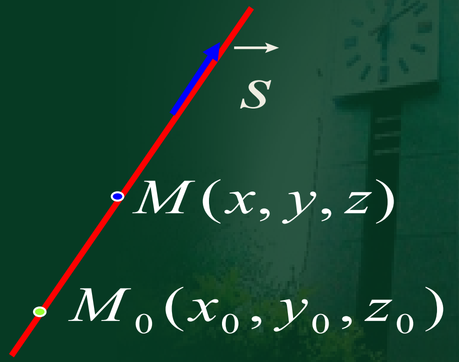
如果一个非零向量平行于一条已知直线，这个向量就叫做这条直线的方向向量.

已知直线上一点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$ 和它的方向向量 $\vec{s} = (m, n, p)$,

设直线上的动点为 $M(x, y, z)$,则 $\overrightarrow{M_0M} \parallel \vec{s}$

故有 $$\frac{x - x_0}{m} = \frac{y - y_0}{n} = \frac{z - z_0}{p}$$

此式称为直线的对称式方程.



正文

直线的任一方向向量s的坐标m、n、p叫做这直线的一组方向数，而向量s的方向余弦叫做该直线的方向余弦.

2. 参数方程

设 $$\frac{x-x_0}{m}=\frac{y-y_0}{n}=\frac{z-z_0}{p}=t$$

得参数方程：$$\begin{cases} x=x_0+mt \\ y=y_0+nt \\ z=z_0+pt \end{cases}$$

3. 两点式方程

过点$M_1(x_1,y_1,z_1)$与点 $M_2(x_2,y_2,z_2)$的直线方程 ：

$$\frac{x-x_1}{x_2-x_1}=\frac{y-y_1}{y_2-y_1}=\frac{z-z_1}{z_2-z_1}$$

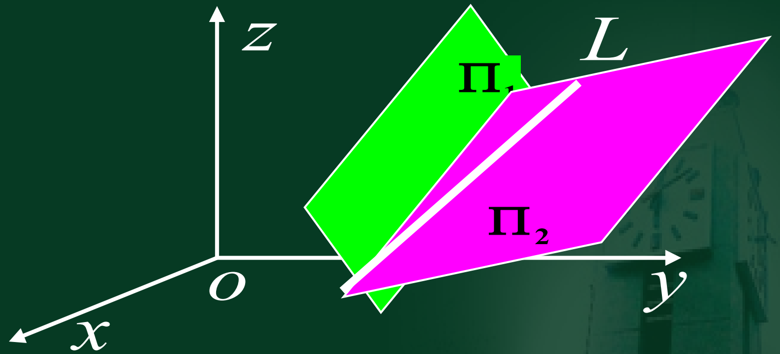
正文

4. 一般式方程

直线可视为两平面交线， 因此其一般式方程

$$\begin{cases} A_1x+B_1y+C_1z+D_1=0 \\ A_2x+B_2y+C_2z+D_2=0 \end{cases}$$

(不唯一)



通过空间一直线L的平面有无限多个，只要在这无限多个平面中任意选取两个，把它们的方程联立起来，所得的方程组就表示空间直线L.

正文

例1 用对称式及参数式表示直线

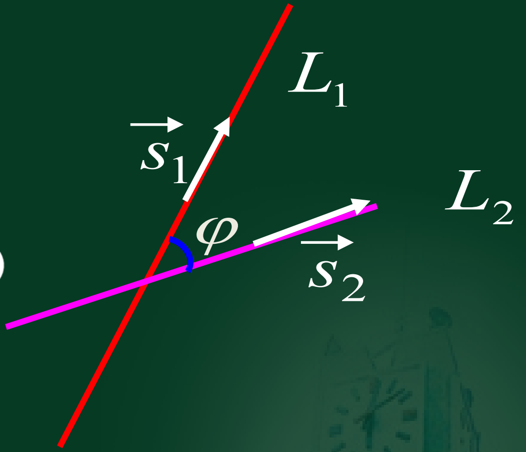
$$\begin{cases} x+y+z+1=0 \\ 2x-y+3z+4=0 \end{cases}$$

例2 求与两平面x-4y=3和2x-y-5z=1的交线平行且过点(-3,2,5)的直线方程.

正文

二、线线间的关系

两直线的夹角指其方向向量间的夹角(通常取锐角)



设直线 L_1 , L_2 的方向向量分别为

$$\vec{s}_1=(m_1,\ n_1,\ p_1),\ \vec{s}_2=(m_2,\ n_2,\ p_2)$$

则两直线夹角 φ 满足

$$\cos\varphi=\frac{|\vec{s}_1\cdot\vec{s}_2|}{|\vec{s}_1||\vec{s}_2|}=\frac{|m_1m_2+n_1n_2+p_1p_2|}{\sqrt{m_1^{\ 2}+n_1^{\ 2}+p_1^{\ 2}}\sqrt{m_2^{\ 2}+n_2^{\ 2}+p_2^{\ 2}}}$$

正文

例3 求下列两直线夹角 $L_1: \dfrac{x-1}{1}=\dfrac{y}{-4}=\dfrac{z+3}{1}$ $L_2: \begin{cases} x+y+2=0 \\ x+2z=0 \end{cases}$

特别有: (1) $L_1 \perp L_2 \longleftrightarrow \vec{s_1} \perp \vec{s_2}$

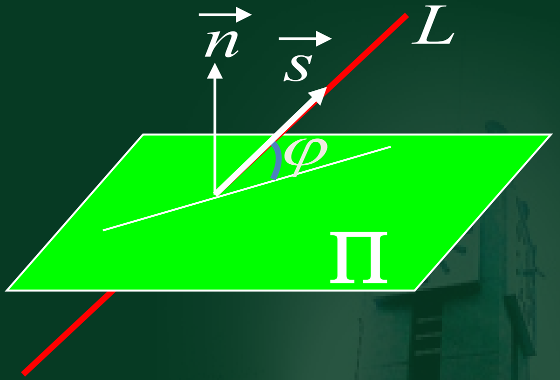
$$\longleftrightarrow m_1 m_2 + n_1 n_2 + p_1 p_2 = 0$$

(2) $L_1 // L_2 \longleftrightarrow \vec{s_1} // \vec{s_2} \longleftrightarrow \dfrac{m_1}{m_2}=\dfrac{n_1}{n_2}=\dfrac{p_1}{p_2}$

三、线面间的关系

当直线与平面不垂直时，直线和它在平面上的投影直线所夹锐角φ称为**直线与平面间的夹角**；

当直线与平面垂直时,规定其夹角 $\dfrac{\pi}{2}$.

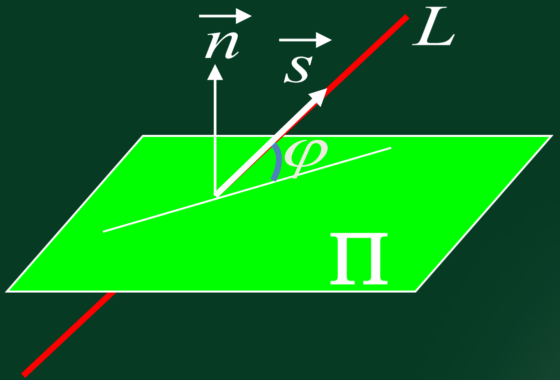


设直线 L 的方向向量为 $\vec{s}=(m,n,p)$

平面 Π 的法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$

正文

则直线与平面夹角 φ 满足



$$\sin\varphi = \cos(\widehat{\vec{s},\vec{n}})$$

$$= \frac{|\vec{s}\cdot\vec{n}|}{|\vec{s}||\vec{n}|}$$

$$= \frac{|Am+Bn+Cp|}{\sqrt{m^2+n^2+p^2}\sqrt{A^2+B^2+C^2}}$$

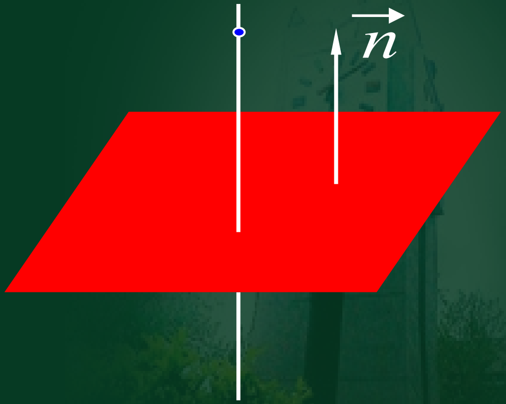
正文

特别有:

(1) $L \perp \Pi \longleftrightarrow \vec{s} \,//\, \vec{n} \longleftrightarrow \dfrac{A}{m} = \dfrac{B}{n} = \dfrac{C}{p}$

(2) $L \,//\, \Pi \longleftrightarrow \vec{s} \perp \vec{n} \longleftrightarrow Am + Bn + Cp = 0$

例4 求过点$(1, -2, 4)$且与平面$2x - 3y + z - 4 = 0$垂直的直线方程.



小结

1. 掌握直线方程的对称式、参数式、一般式等.

2. 理解空间两直线之间的关系.

3. 理解直线与平面之间的关系.