石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学（下）

空间解析几何

平面及其方程

主讲 ： 范瑞琴

目录

正文

一、平面的点法式方程

定义 如果一非零向量垂直于一平面，这向量就叫做该平面的**法向量**.

容易知道，平面上的任一向量均与该平面的法向量垂直.

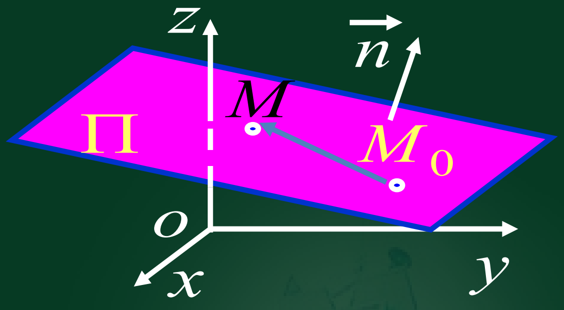
平面Π上一点 $M_0(x_o, y_0, z_0)$和它的一个法向量 $n=(A,B,C)$

为已知时，平面Π的位置就完全确定了.

正文

设一平面Π通过已知点 $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\vec{n}=(A, B, C)$

是Π的一个法向量，则该平面Π的方程为：



$$A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0 \quad ①$$

称①式为平面Π的点法式方程，称 $\vec{n}$ 为平面Π的法向量.

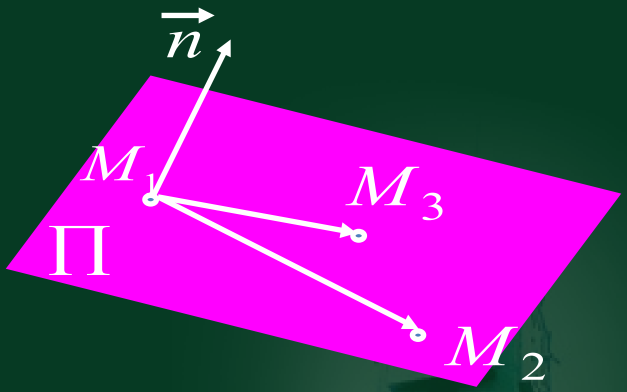
例1 求两点$M_1(5,-3,2)$ 和$M_2(3,-1,4)$的连线的垂直平分面方程.

例2 求过三点 $M_1(2,-1,4)$, $M_2(-1,3,-2)$, $M_3(0,2,3)$ 的平面 Π 的方程.

解 取该平面 Π 的法向量为

$$\vec{n}=\overrightarrow{M_1M_2}\times\overrightarrow{M_1M_3}$$

$$=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ -3 & 4 & -6 \\ -2 & 3 & -1 \end{vmatrix}=(14,9,-1)$$



又 $M_1\in\Pi$，利用点法式得平面 Π 的方程

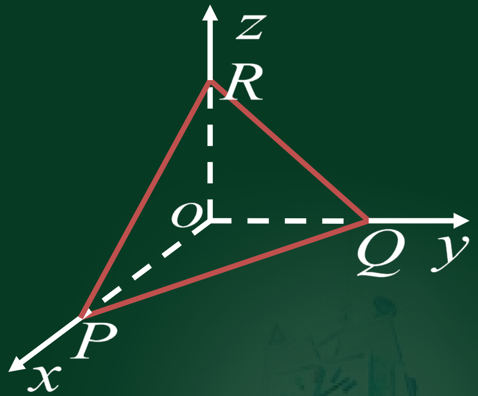
$$14(x-2)+9(y+1)-(z-4)=0$$

即 $$14x+9y-z-15=0$$

正文

特别, 当平面与三坐标轴的交点分别为

$$P(a,0,0)\,,\quad Q(0,b,0)\,,\quad R(0,0,c)$$



时, $(a,b,c \neq 0)$ 平面方程为

$$\frac{x}{a}+\frac{y}{b}+\frac{z}{c}=1$$

此式称为平面的**截距式方程**.

二、平面的一般方程

平面的点法式方程 $A(x-x_0)+B(y-y_0)+C(z-z_0)=0$

可改写为 $Ax+By+Cz+D=0$, $\quad D=-Ax_0-By_0-Cz_0$.

此方程称为平面的一般方程.

法向量为 $\vec{n}=(A,B,C)$

正文

$$Ax+By+Cz+D=0 \quad (A^2+B^2+C^2 \neq 0)$$

特殊情形

- 当 $D=0$ 时，$Ax+By+Cz=0$ 表示通过原点的平面；
- 当 $A=D=0$ 时，$By+Cz=0$ 表示通过 x 轴的平面；
- 当 $A=0$ 时，$By+Cz+D=0$ 的法向量 $\vec{n}=(0,B,C)\perp\vec{i}$，平面平行于 x 轴；
- $Ax+Cz+D=0$ 表示平行于 y 轴的平面；
- $Ax+By+D=0$ 表示平行于 z 轴的平面；
- $Cz+D=0$ 表示平行于 xoy 面的平面；
- $Ax+D=0$ 表示平行于 yoz 面的平面；
- $By+D=0$ 表示平行于 zox 面的平面.

正文

例3 求通过 x 轴和点 $(4, -3, -1)$ 的平面方程.

例4 已知平面Π过点 $M_0(1, -2, 1)$，且平行于z轴和向量a=2i+2j，求平面 Π 的方程.

正文

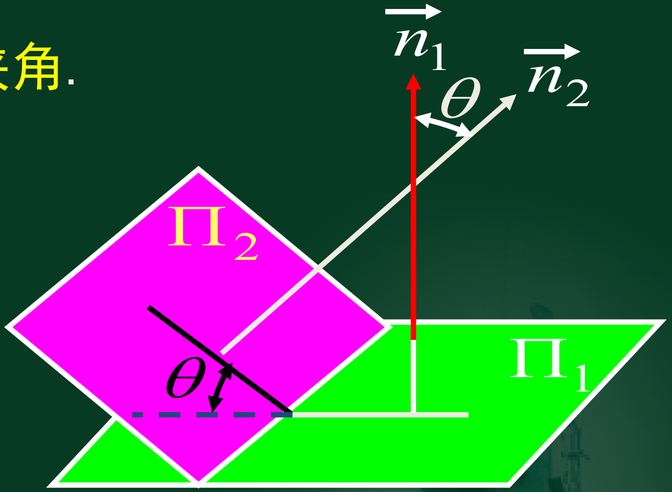
网络精品课程

三、两平面间的关系

两平面法向量的夹角(常指锐角)称为**两平面的夹角**.

设平面Π_1的法向量为 $\vec{n}_1=(A_1, B_1, C_1)$

平面Π_2的法向量为 $\vec{n}_2=(A_2, B_2, C_2)$



则两平面夹角θ的余弦为 $\cos\theta=\dfrac{|\vec{n}_1\cdot\vec{n}_2|}{|\vec{n}_1|\,|\vec{n}_2|}$

即

$$\cos\theta=\frac{|A_1A_2+B_1B_2+C_1C_2|}{\sqrt{A_1^{\,2}+B_1^{\,2}+C_1^{\,2}}\;\sqrt{A_2^{\,2}+B_2^{\,2}+C_2^{\,2}}}$$

正文

例5 求两平面$x-y+2z-6=0$和$2x+y+z-5=0$的夹角.

解 由夹角公式有

$$\cos\theta=\frac{|1\times 2+(-1)\times 1+2\times 1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2+2^2}\cdot\sqrt{2^2+1^2+1^2}}=\frac{1}{2}$$

因此，所求夹角 $\theta=\dfrac{\pi}{3}$

正文

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

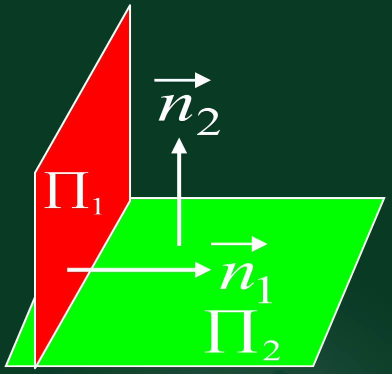
$$\Pi_1: \ n_1 = (A_1, B_1, C_1)$$

$$\Pi_2: \ n_2 = (A_2, B_2, C_2)$$

特别有下列结论：

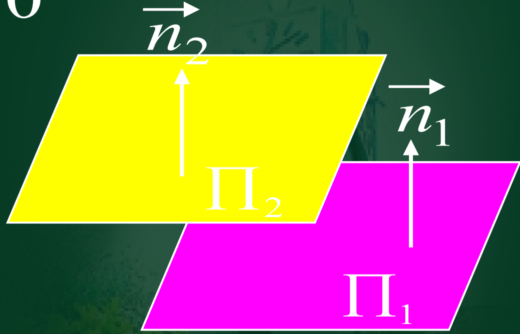
(1) $\Pi_1 \perp \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 \perp \vec{n}_2$

$$\Longleftrightarrow A_1 A_2 + B_1 B_2 + C_1 C_2 = 0$$



(2) $\Pi_1 // \Pi_2 \Longleftrightarrow \vec{n}_1 // \vec{n}_2$

$$\Longleftrightarrow \frac{A_1}{A_2} = \frac{B_1}{B_2} = \frac{C_1}{C_2}$$



(3) Π_1与Π_2重合 $\Longleftrightarrow \dfrac{A_1}{A_2} = \dfrac{B_1}{B_2} = \dfrac{C_1}{C_2} = \dfrac{D_1}{D_2}$

正文

例6 一平面通过两点$M_1(1,1,1)$和$M_2(0,1,-1)$，且垂直于平面$\prod: x+y+z=0$，求其方程.

小结

1. 掌握平面方程的一般式，点法式，截距式等.

2. 理解平面的特殊位置关系和其方程之间的关系.

3. 理解两个平面之间的相对位置.