石家莊鐵道大學 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

# 高等数学（下）

## 空间解析几何

# 向量的向量积

主讲 ： 范瑞琴

# 目录

# 正文

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

## 一、两向量的向量积的概念

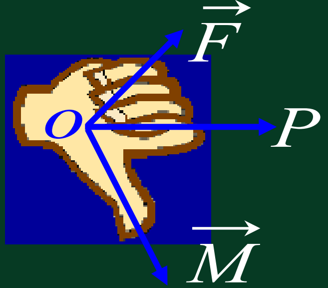
引例 设$O$为杠杆$L$的支点，有一个与杠杆夹角为$\theta$的力$\vec{F}$作用在杠杆的$P$点上，则力$\vec{F}$作用在杠杆上的力矩是一个向量$\vec{M}$

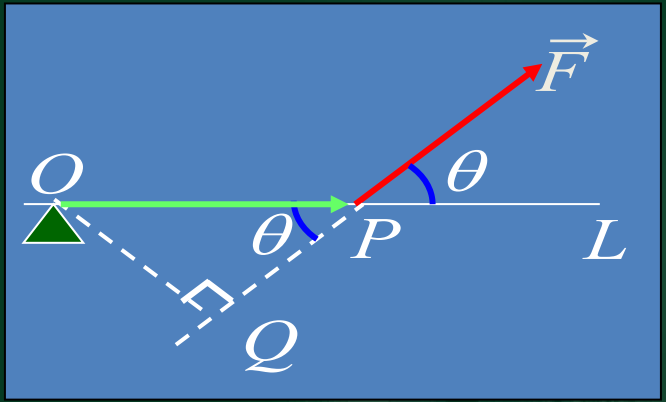
$$|\vec{M}| = |OQ|\,|\vec{F}| = |\overrightarrow{OP}|\,|\vec{F}|\sin\theta$$

$$\overrightarrow{OP} \Rightarrow \vec{F} \Rightarrow \vec{M}$$

符合右手规则，满足

$$\vec{M} \perp \overrightarrow{OP} \qquad \vec{M} \perp \vec{F}$$




$$|OQ| = |\overrightarrow{OP}|\sin\theta$$

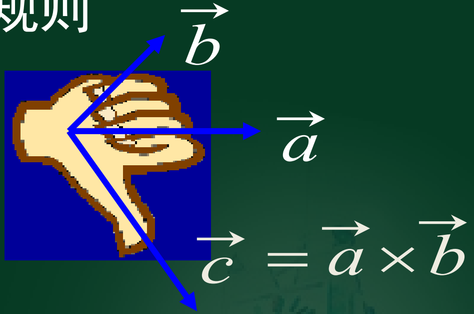
# 正文

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

**定义** 设向量 $\vec{a}$, $\vec{b}$ 的夹角为 $\theta$，定义

$$\text{向量}\quad \vec{c}\begin{cases}\text{方向：}\quad \vec{c}\perp\vec{a},\ \vec{c}\perp\vec{b}\ \text{且符合右手规则}\\ \text{模：}\quad |\vec{c}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\end{cases}$$




称 $\vec{c}$ 为向量 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的向量积，记作

$$\vec{c}=\vec{a}\times\vec{b}\quad\text{(叉积)}$$

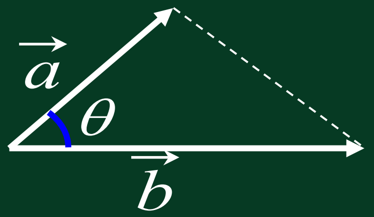
引例中的力矩 $\vec{M}=\overrightarrow{OP}\times\vec{F}$

# 正文

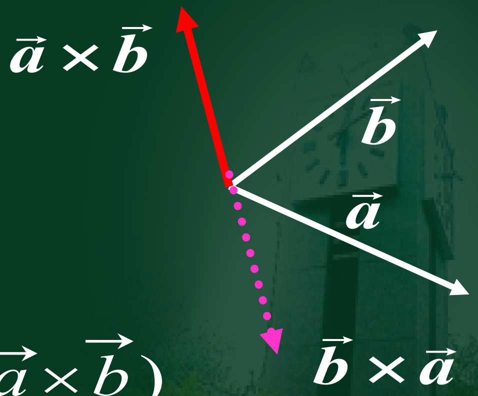


注 右图三角形面积

$$S=\frac{1}{2}\left|\vec{a}\times\vec{b}\right|$$




$|\vec{a}\times\vec{b}|$表示以$\vec{a}$和$\vec{b}$为邻边的平行四边形的面积.




运算律

(1) 反交换律 $\vec{a}\times\vec{b}=-\vec{b}\times\vec{a}$

(2) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times\vec{c}$

(3) 结合律 $(\lambda\vec{a})\times\vec{b}=\vec{a}\times(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\times\vec{b})$

# 正文



## 二、 性质

(1) $\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$

(2) $\vec{a},\vec{b}$为非零向量, 则 $\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$

证明: 当$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$时,

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow |\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=0$$

$$\Longleftrightarrow \sin\theta=0, \text{即 } \theta=0 \text{ 或 } \pi \Longleftrightarrow \vec{a}\,/\!/\,\vec{b}$$

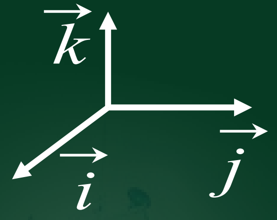
# 正文



## 三、向量积的坐标表示式

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\times\vec{b}=(\underline{a_x\vec{i}}+\underline{a_y\vec{j}}+\underline{a_z\vec{k}})\times(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$




$$=\cancel{a_xb_x(\vec{i}\times\vec{i})}+a_xb_y(\vec{i}\times\vec{j})+a_xb_z(\vec{i}\times\vec{k})$$

$$+a_yb_x(\vec{j}\times\vec{i})+\cancel{a_yb_y(\vec{j}\times\vec{j})}+a_yb_z(\vec{j}\times\vec{k})$$

$$+a_zb_x(\vec{k}\times\vec{i})+a_zb_y(\vec{k}\times\vec{j})+\cancel{a_zb_z(\vec{k}\times\vec{k})}$$

$$=\boldsymbol{a_xb_y\vec{k}+a_xb_z(-\vec{j})+a_yb_x(-\vec{k})+a_yb_z\vec{i}+a_zb_x\vec{j}+a_zb_y(-\vec{i})}$$

$$=(a_yb_z-a_zb_y)\vec{i}+(a_zb_x-a_xb_z)\vec{j}+(a_xb_y-a_yb_x)\vec{k}$$

# 正文



## 向量积的行列式计算法

$$\vec{a}\times\vec{b}=(a_y b_z-a_z b_y)\vec{i}+(a_z b_x-a_x b_z)\vec{j}+(a_x b_y-a_y b_x)\vec{k}$$

$$=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ a_x & a_y & a_z\\ b_x & b_y & b_z\end{vmatrix}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{a}&=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}\\ \vec{b}&=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}\end{aligned}}$$

$$=\left(\begin{vmatrix}a_y & a_z\\ b_y & b_z\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}a_x & a_z\\ b_x & b_z\end{vmatrix},\begin{vmatrix}a_x & a_y\\ b_x & b_y\end{vmatrix}\right)$$

# 正文



$$\vec{a}\times\vec{b}=\begin{vmatrix} a_y & a_z \\ b_y & b_z \end{vmatrix}\vec{i}-\begin{vmatrix} a_x & a_z \\ b_x & b_z \end{vmatrix}\vec{j}+\begin{vmatrix} a_x & a_y \\ b_x & b_y \end{vmatrix}\vec{k}=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_x & a_y & a_z \\ b_x & b_y & b_z \end{vmatrix}$$

向量积为零向量的坐标表示: 由上式可得

$$\vec{a}\times\vec{b}=\vec{0} \Longleftrightarrow \vec{a}/\!/\vec{b} \Longleftrightarrow \frac{a_x}{b_x}=\frac{a_y}{b_y}=\frac{a_z}{b_z}$$

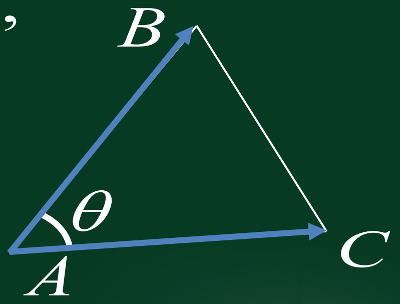
$b_x$、$b_y$、$b_z$不能同时为零，但允许一个或两个为零，

例如，$\dfrac{a_x}{0}=\dfrac{a_y}{0}=\dfrac{a_z}{b_z} \Rightarrow a_x=0,\ a_y=0$

# 正文



**例1** 已知三点 $A(1,2,3)$, $B(3,4,5)$, $C(2,4,7)$, 求三角形 $ABC$ 的面积.




**例 2** 求与 $\vec{a}=3\vec{i}-2\vec{j}+4\vec{k}$，$\vec{b}=\vec{i}+\vec{j}-2\vec{k}$ 都垂直的单位向量.

# 小结



1. 掌握向量积的概念.

2. 理解向量积的性质.

3. 会求两个向量的向量积.