石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

高等数学（下）

空间解析几何

向量的数量积

主讲 ： 范瑞琴

目录

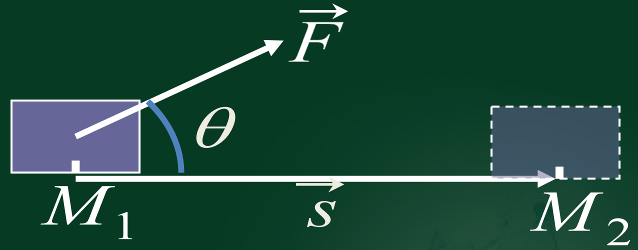
正文

网络精品课程

一、两向量的数量积的概念

引例 设一物体在常力 $\vec{F}$ 作用下，沿与力夹角为 θ 的直线移动，位移为 $\vec{s}$，则力 $\vec{F}$ 所做的功为

$$W = |\vec{F}||\vec{s}|\cos\theta$$



$$\boxed{W = \vec{F}\cdot\vec{s}}$$

定义 设向量 $\vec{a}, \vec{b}$ 的夹角为 θ，称

$$|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \xlongequal{\text{记作}} \vec{a}\cdot\vec{b}$$

为 $\vec{a}$ 与 $\vec{b}$ 的数量积或点积.即

$$\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

正文

运算律

(1) 交换律 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{a}$

(2) 结合律 $(\lambda,\mu$ 为实数$)$

$$(\lambda\vec{a})\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot(\lambda\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

$$(\lambda\vec{a})\cdot(\mu\vec{b})=\lambda(\vec{a}\cdot(\mu\vec{b}))=\lambda\mu(\vec{a}\cdot\vec{b})$$

(3) 分配律 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}$

正文

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

二、 性质

(1) $\vec{a}\cdot\vec{a}=|\vec{a}|^2 \Rightarrow |\vec{\boldsymbol{a}}|=\sqrt{\vec{\boldsymbol{a}}\cdot\vec{\boldsymbol{a}}}$

(2) $\vec{a},\vec{b}$为两个非零向量, 则有

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b}$$

$$\vec{a}\neq\vec{0},\vec{b}\neq\vec{0}$$

则 $\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$$\Updownarrow$$

$$(\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\frac{\pi}{2}$$

正文

网络精品课程

三、数量积的坐标表示

设 $\vec{a}=a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k}$, $\vec{b}=b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k}$, 则

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=(a_x\vec{i}+a_y\vec{j}+a_z\vec{k})\cdot(b_x\vec{i}+b_y\vec{j}+b_z\vec{k})$$

$$\vec{i}\cdot\vec{i}=\vec{j}\cdot\vec{j}=\vec{k}\cdot\vec{k}=1,\quad \vec{i}\cdot\vec{j}=\vec{j}\cdot\vec{k}=\vec{k}\cdot\vec{i}=0$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_xb_x+a_yb_y+a_zb_z$$

正文

两向量的夹角公式

当 $\vec{a}, \vec{b}$ 为非零向量时, 由于 $\vec{a}\cdot\vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$, 得

$$\cos\theta = \frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \frac{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}\sqrt{b_x^2 + b_y^2 + b_z^2}}$$

注 $\vec{a}\cdot\vec{b} = 0 \Longleftrightarrow \vec{a}\perp\vec{b} \Longleftrightarrow \boldsymbol{a_x b_x + a_y b_y + a_z b_z = 0}$

正文

例 1 已知 $\vec{a}=(1,1,-4)$，$\vec{b}=(1,-2,2)$，求

(1) $\vec{a}\cdot\vec{b}$；（2）$\vec{a}$与 $\vec{b}$ 的夹角.

例 2 已知$<\vec{a},\vec{b}>=\dfrac{2}{3}\pi$，$|\vec{a}|=3,|\vec{b}|=4$，求向量$3\vec{a}+2\vec{b}$的模.

例 3 证明向量 $\vec{c}$与向量$(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}-(\vec{b}\cdot\vec{c})\vec{a}$垂直.

小结

1. 掌握数量积的概念.

2. 理解数量积的性质.

3. 会求两个向量的数量积和夹角.