



石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

材料力学

第7章 梁的应力

第1讲 梁的正应力

主讲：张婷

主要内容

一、纯弯曲时横截面上的正应力

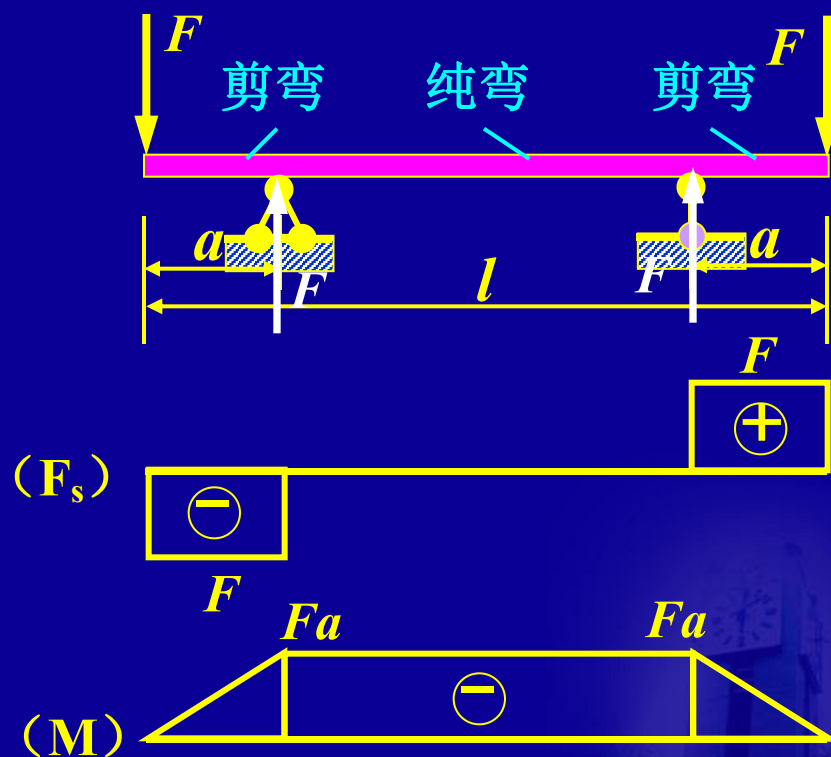
二、剪力弯曲时横截面上的正应力

一、纯弯曲时横截面上的正应力

梁的内力 $\left\{ \begin{array}{l} \text{剪力 } F_s \leftarrow \text{切应力 } \tau \\ \text{弯矩 } M \leftarrow \text{正应力 } \sigma \end{array} \right.$

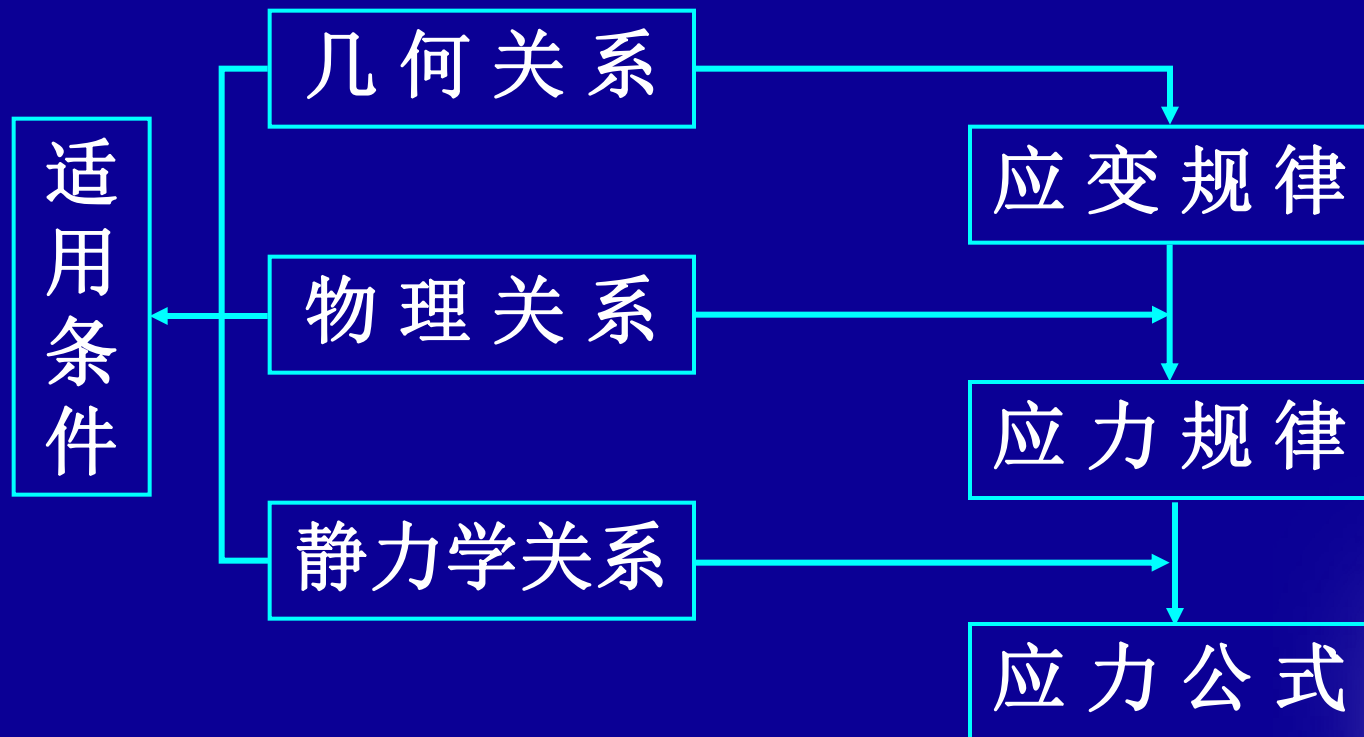
纯弯曲：梁段内各横截面上的剪力为零，弯矩为常数，则该梁段的弯曲称为纯弯曲。

剪力弯曲：梁段内剪力不为零的弯曲称为剪力弯曲。（也称横力弯曲）



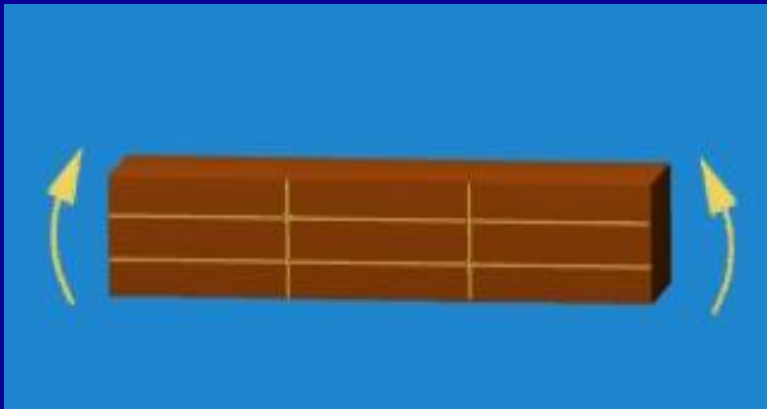
一、纯弯曲时横截面上的正应力

纯弯曲时正应力研究方法



一、纯弯曲时横截面上的正应力

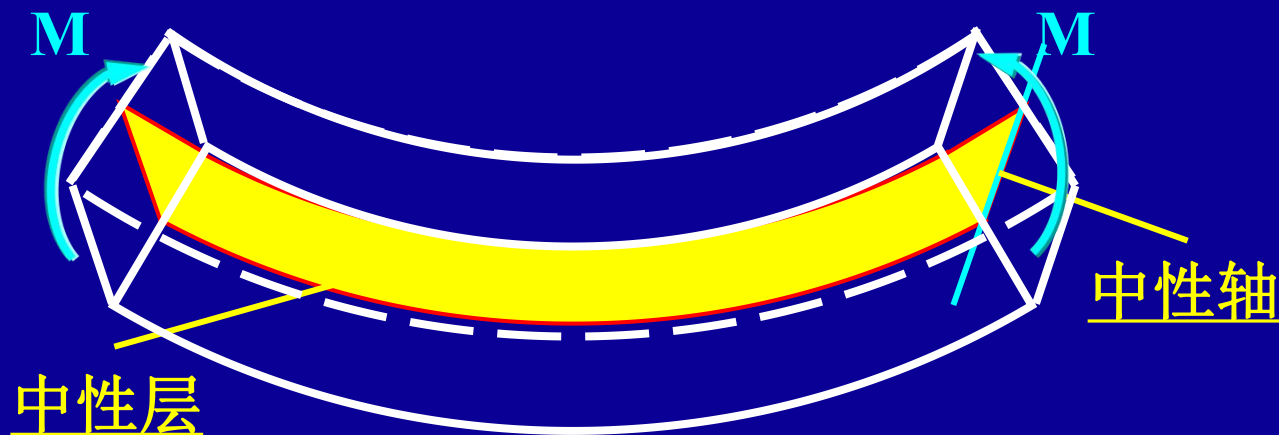
1、几何关系



实验现象：

- ❖ 横向线仍为直线，但相对转过了一个角度；
- ❖ 纵向线变成曲线，一侧伸长，一侧缩短，中间有一层长度不变；
- ❖ 变形后的纵向线和横向线仍保持正交。

一、纯弯曲时横截面上的正应力



假设:

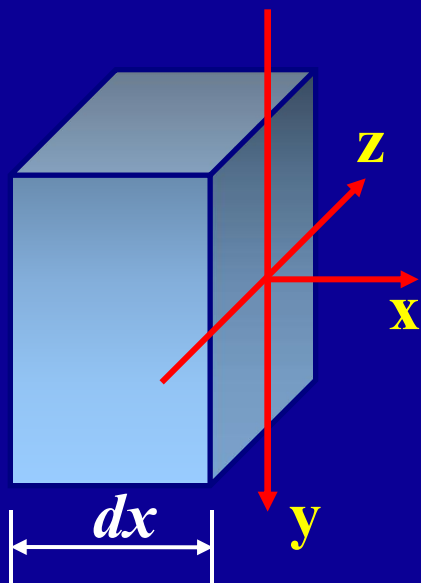
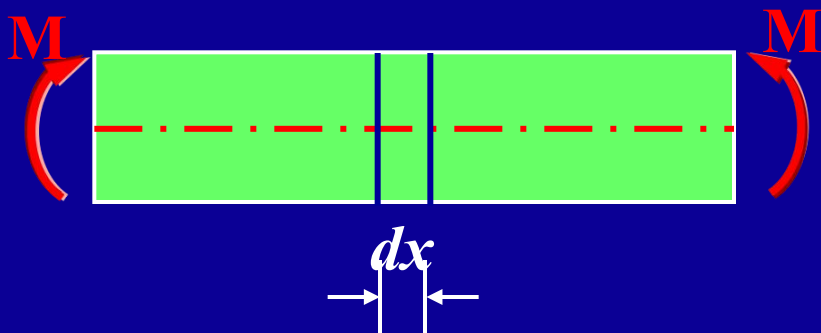
❖ 变形后的横截面仍保持为平面，且仍与轴线正交。——**平面假设**

❖ 梁内各纵向“纤维”只受轴向拉（压）力，相互之间无挤压。——**单向受力假设**

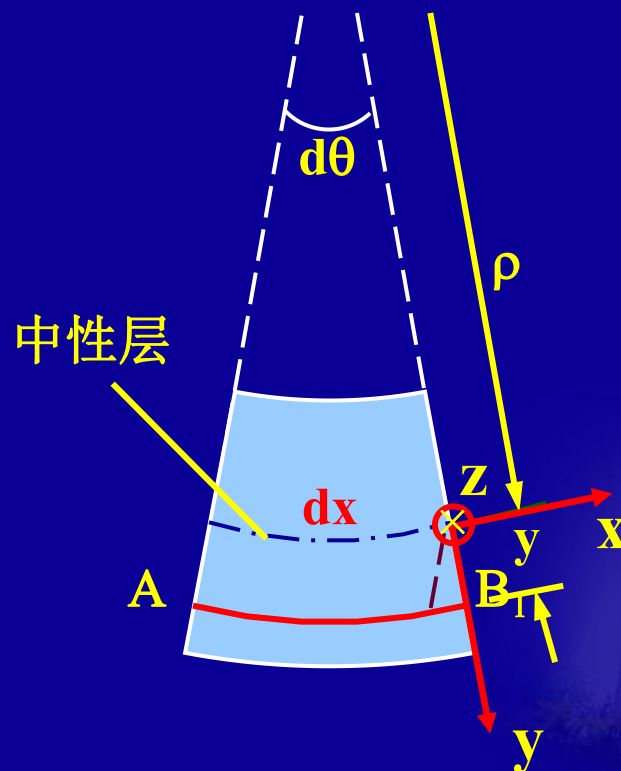
❖ 材料拉、压弹性模量相同

一、纯弯曲时横截面上的正应力

应变分布规律:



y——纵向对称轴
 z——中性轴



一、纯弯曲时横截面上的正应力

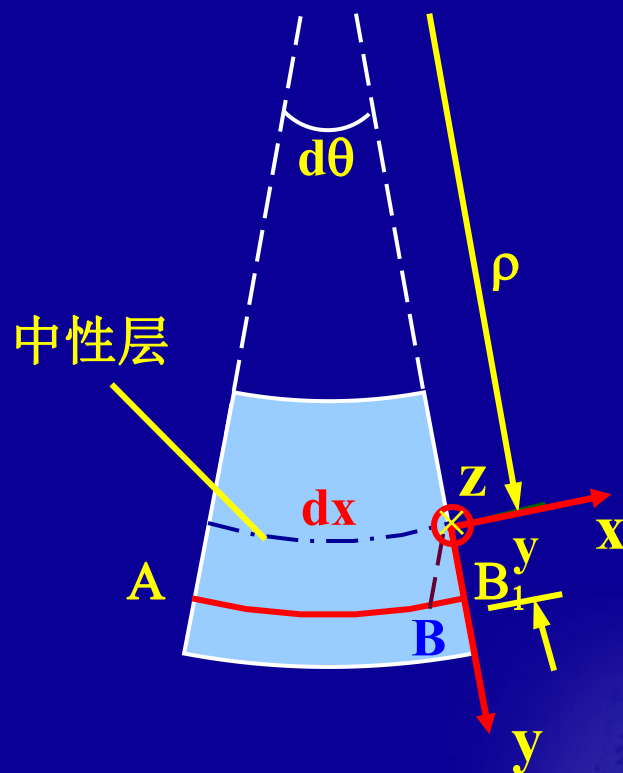
纤维AB的伸长量

$$ds = yd\theta$$

线应变

$$\varepsilon = \frac{ds}{dx} = \frac{yd\theta}{\rho d\theta} = \frac{y}{\rho}$$

☺ **结论：**横截面上任意点的线应变与点到中性层的距离成正比。



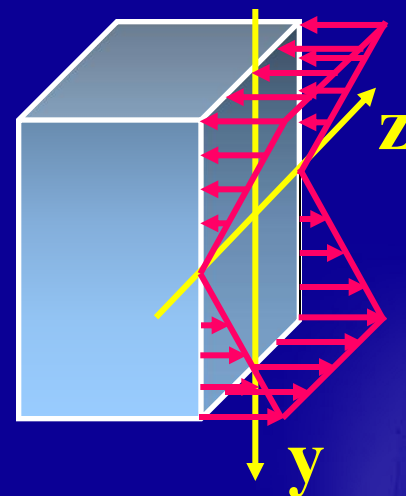
一、纯弯曲时横截面上的正应力

2、物理关系

若材料在线弹性范围内，且拉压弹性模量相同。

$$\sigma = E\varepsilon = E \frac{y}{\rho}$$

- ☺ 横截面上任意点的正应力与点到中性轴的距离成正比。
- ☺ 正应力在上、下边缘点处最大，中性轴上为零。

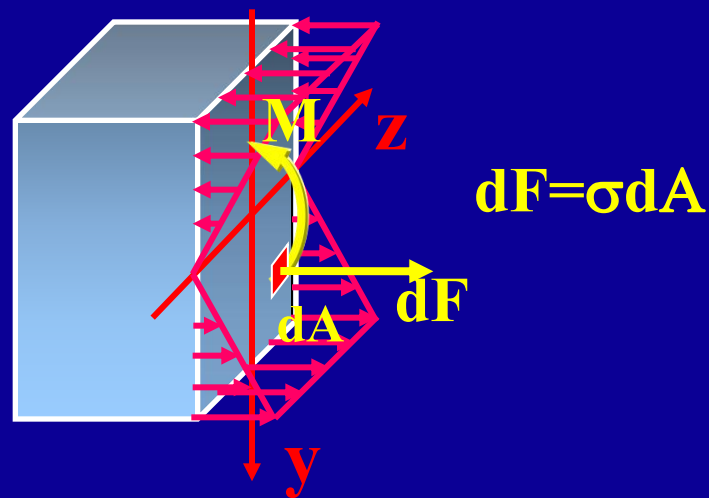


一、纯弯曲时横截面上的正应力

3、静力学关系

$$\sigma = E \frac{y}{\rho}$$

静力等效条件



$$F_x = \int_A \sigma dA = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{E}{\rho} S_z = 0 \quad \longrightarrow \quad \odot \text{ z轴为形心轴}$$

$$M_y = \int_A z \sigma dA = 0 \quad \longrightarrow \quad \frac{E}{\rho} I_{yz} = 0 \quad \longrightarrow \quad y \text{为对称轴, 满足}$$

$$M_z = \int_A y \sigma dA = M \quad \longrightarrow \quad \frac{E}{\rho} I_z = M \quad \longrightarrow \quad \odot \text{ 曲率}$$

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

一、纯弯曲时横截面上的正应力

$$\frac{1}{\rho} = \frac{M}{EI_z}$$

EI_z —弯曲刚度。表示梁抵抗弯曲变形的能力。

正应力公式

$$\sigma = \frac{My}{I_z}$$

二、剪力弯曲时横截面上的正应力

剪力弯曲的特点:

- ❖ 由于切应力的存在，梁的横截面发生翘曲；
- ❖ 纵向纤维之间可能存在挤压。

剪力弯曲正应力由弹性力学求解，弹性力学分析表明，对于 $l \geq 5h$ 的长梁，其精确解与按纯弯曲正应力公式得到的最大正应力比较，误差不超过1%。

工程中
$$\sigma = \frac{M(x)y}{I_z}$$

二、剪力弯曲时横截面上的正应力

$$\sigma = \frac{M(x)y}{I_z}$$

公式适用范围:

- ❖ 平面弯曲长梁，且纵向纤维无挤压。
- ❖ 线弹性范围，且拉压弹性模量相等。