石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

# 材料力学

## 第六章 截面的几何性质

## 第一讲 静矩和形心、惯性矩和惯性积

主讲 ：徐步青

# 主要内容

一、 静矩和形心

二、 惯性矩和惯性积

轴向拉压 $\sigma = \dfrac{F_N}{A}$ $\Delta l = \dfrac{F_N l}{EA}$

扭转 $\tau_\rho = \dfrac{T\rho}{I_p}$ $\varphi = \dfrac{Tl}{GI_p}$

◇其中面积A、极惯性矩$I_P$为与横截面的形状和尺寸有关的几何量，称为截面的几何性质。

◇在计算梁的**应力**和**位移**时，还要用到另一些截面的**几何性质**。这一章就将介绍这些几何性质和计算方法。

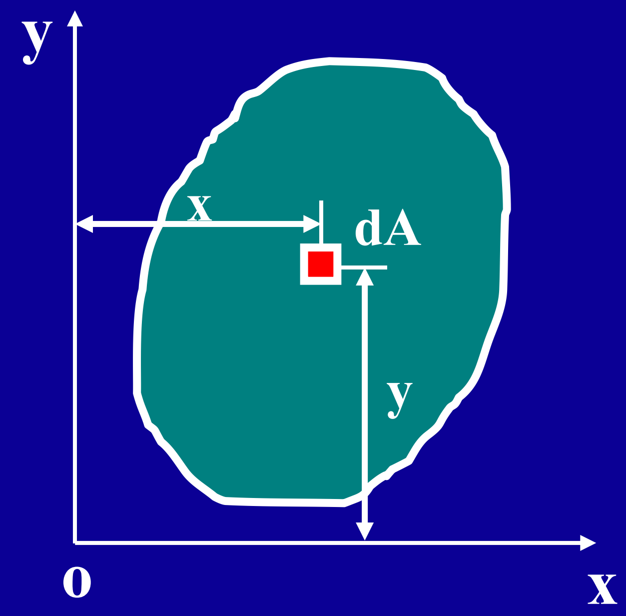
# 一、静矩和形心

## 1、静矩

❖ 定义

$$S_x = \int_A y\mathrm{d}A$$ ——截面对x轴的静矩

$$S_y = \int_A x\mathrm{d}A$$ ——截面对y轴的静矩




❖ 性质

☺ 静矩相对于坐标轴而言。

☺ 静矩可正、可负、可为零。

常用单位：$m^3$，$mm^3$

# 一、静矩和形心

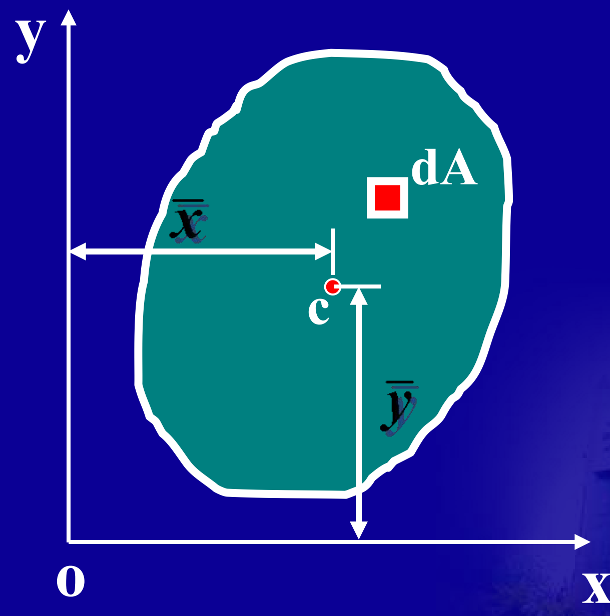
## 2、形心

将平面图形看作均质等厚薄板，薄板的重心即平面图形的形心。

由理论力学知识可知：

$$\bar{x}=\frac{\int_A x\mathrm{d}A}{A}=\frac{S_y}{A}$$

$$\bar{y}=\frac{\int_A y\mathrm{d}A}{A}=\frac{S_x}{A}$$

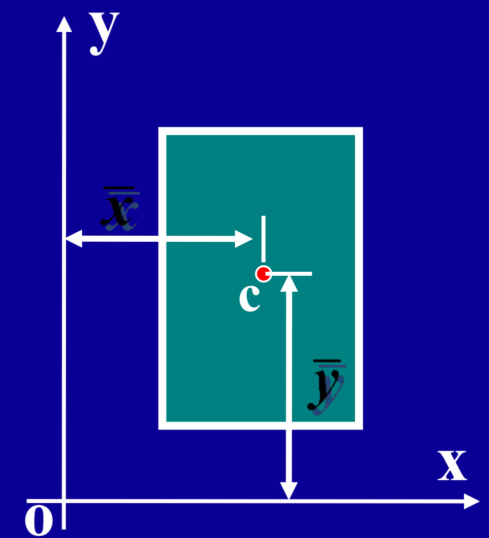


# 一、静矩和形心

❖ 规则图形截面的静矩

$$S_x = \bar{y}A$$

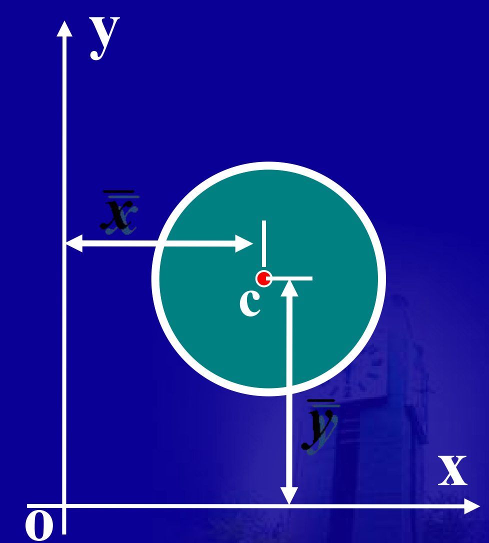
$$S_y = \bar{x}A$$




❖ 性质：

☺ 截面对形心轴的静矩为零。

☺ 若截面对某轴静矩为零，则该轴为形心轴。



# 一、静矩和形心

## 3、组合截面的静矩和形心

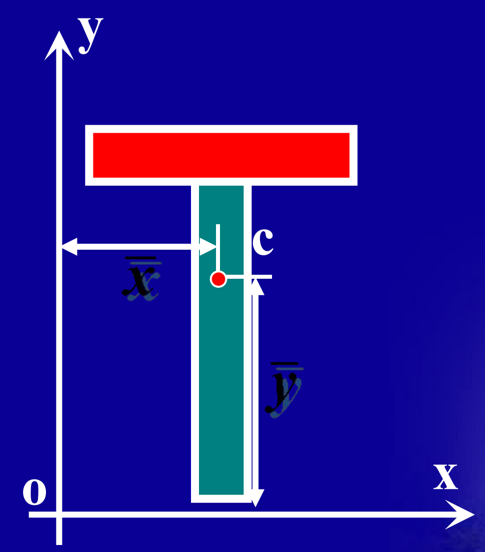
☺ 由几个简单图形组成的截面称为**组合截面**。

☺ 截面各组成部分对某一轴静矩的代数和，等于该截面对同一轴的静矩。

❖ **组合截面**的**静矩**

$$S_x = \sum S_{xi} = \sum A_i \bar{y}_i$$

$$S_y = \sum S_{yi} = \sum A_i \bar{x}_i$$

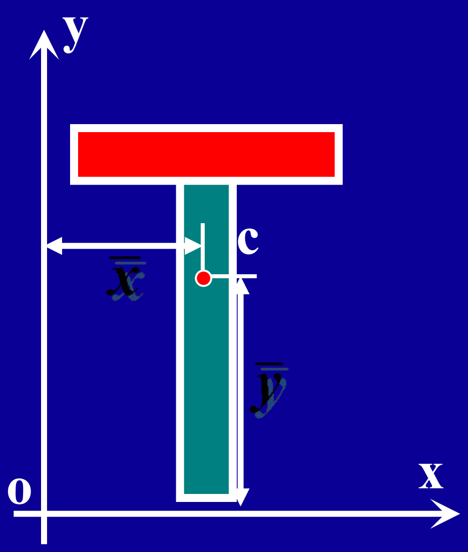


# 一、静矩和形心

❖ **组合截面的形心**

$$\bar{x} = \frac{S_y}{A} = \frac{\sum A_i \bar{x}_i}{\sum A_i}$$

$$\bar{y} = \frac{S_x}{A} = \frac{\sum A_i \bar{y}_i}{\sum A_i}$$



**例题**：求图示截面的形心。

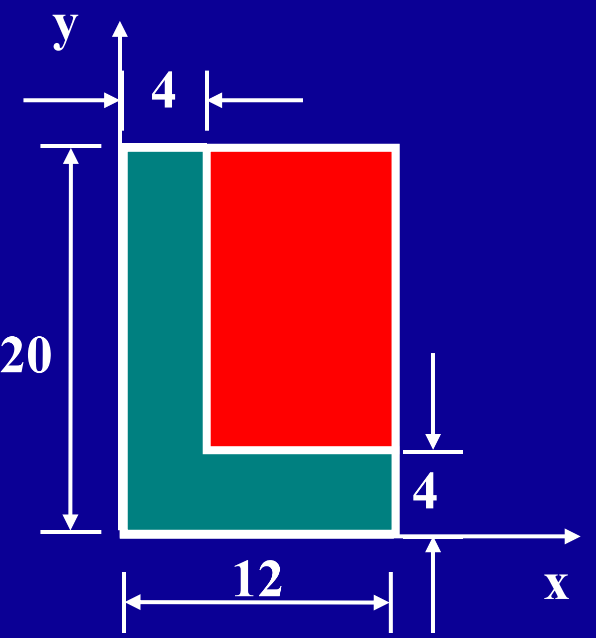
解：取参考坐标系如图所示

$$\bar{x}=\frac{\sum A_i\bar{x}_i}{\sum A_i}=\frac{8\times4\times8+20\times4\times2}{8\times4+20\times4}$$

$$=3.71cm$$

$$\bar{y}=\frac{\sum A_i\bar{y}_i}{\sum A_i}=\frac{8\times4\times2+20\times4\times10}{8\times4+20\times4}$$

$$=7.71cm$$

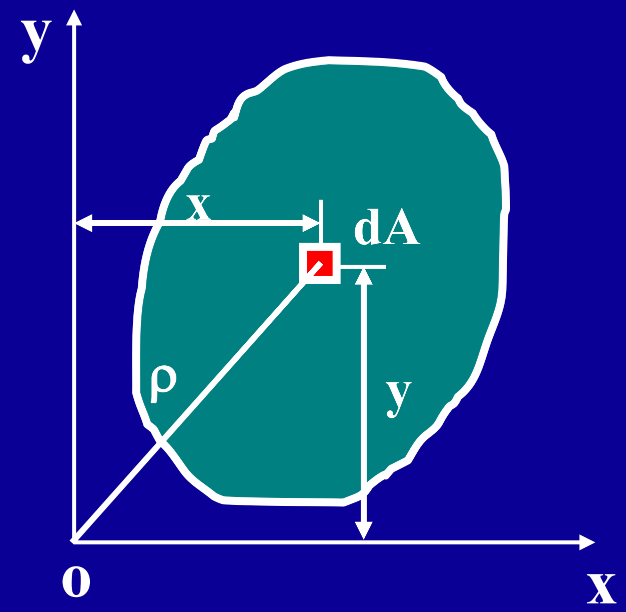



（单位：cm）

也可采用**负面积法**

## 二、惯性矩和惯性积

### 1、定义




$$I_x = \int_A y^2 \mathrm{d}A$$

——截面对x轴的惯性矩

$$I_y = \int_A x^2 \mathrm{d}A$$

——截面对y轴的惯性矩

$$I_p = \int_A \rho^2 \mathrm{d}A$$ ——截面对原点o点的极惯性矩

$$I_{xy} = \int_A xy \mathrm{d}A$$ ——截面对x、y轴的惯性积

# 二、惯性矩和惯性积

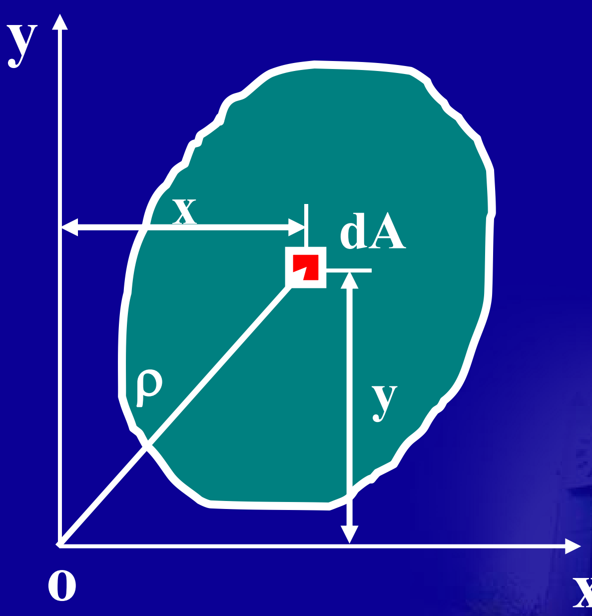
## 2、性质

☺ $I_x$、$I_y$ 、$I_p$、 $I_{xy}$均相对于坐标轴而言。

☺ $I_x$、 $I_y$ 、$I_p$永远为正， $I_{xy}$可正、可负、可为零。

☺ $I_x+I_y=I_p$

常用单位：$m^4$，$mm^4$

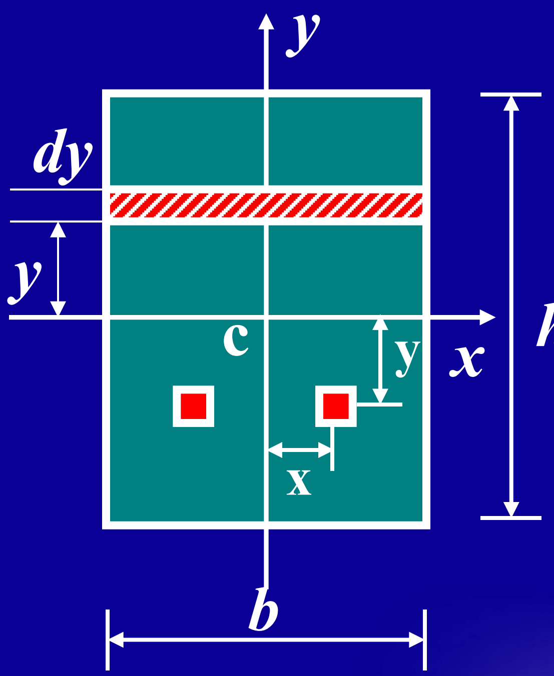


**例题**：求矩形截面对其对称轴的惯性矩和惯性积。

解：

$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_{-h/2}^{h/2} y^2 b dy$$

$$= \frac{b}{3} y^3 \Big|_{-h/2}^{h/2} = \frac{1}{12} bh^3$$



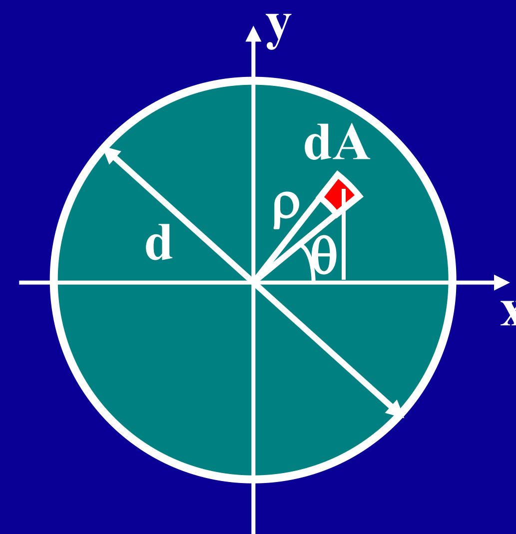

**同理** $I_y = \int_A x^2 dA = \frac{1}{12} hb^3$

$$I_{xy} = \int_A xy dA = 0$$

☺ 性质：若x（或y）是**对称轴**，则必有$I_{xy}=0$。

**例题**：求圆形截面对其对称轴的惯性矩。

解：由定义式




$$I_x = \int_A y^2 dA = \int_A (\rho \sin\theta)^2 dA$$

$$= \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} (\sin\theta)^2 d\theta$$

$$= \int_0^{d/2} \rho^3 d\rho \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2\theta}{2} d\theta = \frac{\pi d^4}{64}$$

也可利用**性质**求解 $I_x = I_y = \frac{I_p}{2} = \frac{\pi d^4}{64}$

# 本讲小结

**本讲小结：**

本讲主要介绍了截面静矩的定义，形心的计算，静矩和形心之间的关系，组合截面静矩和形心的计算，惯性矩和惯性积的定义，矩形截面和圆形截面对其对称轴惯性矩的计算。