石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

材料力学

第十章 应力状态与强度理论

第四讲 双向和三向应力状态的胡克定律

主讲 ： 刘灵灵

石家庄铁道大学 SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

主要内容

- 一、单向应力状态下的胡克定律
- 二、双向应力状态下的胡克定律
- 三、三向应力状态下的胡克定律
- 四、广义胡克定律的应用实例

一、单向应力状态下的胡克定律

沿主应力σ_1方向的线应变为：

$$\varepsilon_1' = \frac{\sigma_1}{E}$$

垂直于σ_1方向的线应变为：

$$\varepsilon_1'' = -\mu\varepsilon_1' = -\mu\frac{\sigma_1}{E}$$

沿σ_2方向的线应变为：

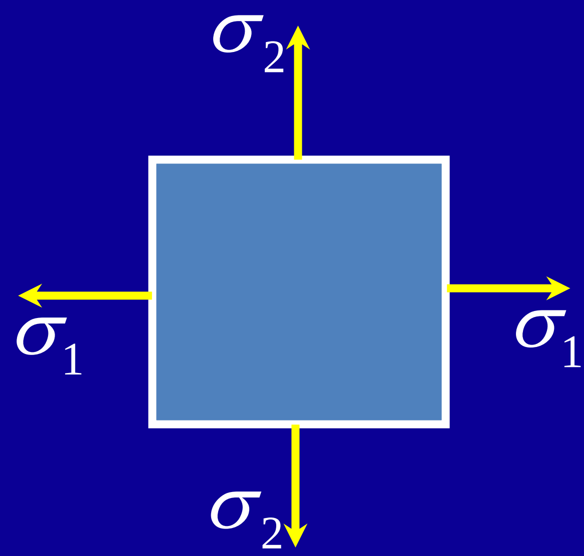
$$\varepsilon_2' = \frac{\sigma_2}{E}$$

垂直于σ_2方向的线应变为：

$$\varepsilon_2'' = -\mu\varepsilon_2' = -\mu\frac{\sigma_2}{E}$$

其中分别E,μ为材料的拉压弹性模量和泊松比。

二、双向应力状态下的胡克定律



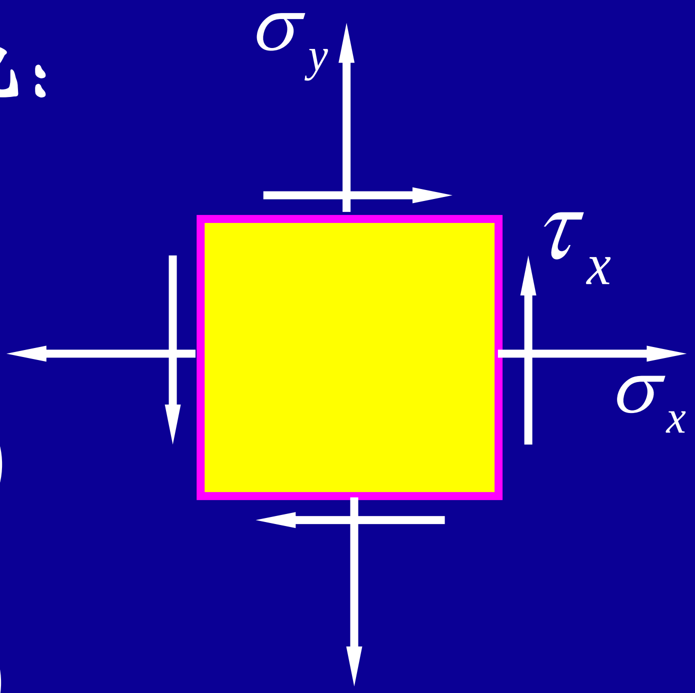
利用叠加法，得到沿两个主应力方向的应变：

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1' + \varepsilon_2'' = \frac{\sigma_1}{E} - \mu\frac{\sigma_2}{E}$$

$$\varepsilon_2 = \varepsilon_2' + \varepsilon_1'' = \frac{\sigma_2}{E} - \mu\frac{\sigma_1}{E}$$

二、双向应力状态下的胡克定律

对于平面应力状态的一般情况：



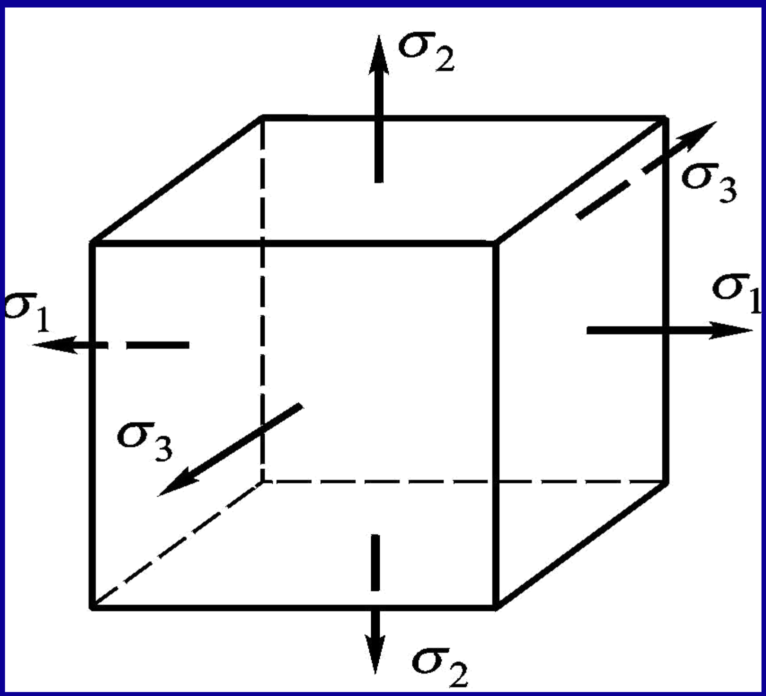
$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right)$$

$$\varepsilon_y = \frac{1}{E}\left(\sigma_y - \mu\sigma_x\right)$$

$$\gamma_{xy} = \frac{\tau_x}{G}$$

三、三向应力状态下的胡克定律

空间应力状态以主应力表示时，广义胡克定律为：



$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu(\sigma_2 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{E}\left[\sigma_2 - \mu(\sigma_1 + \sigma_3)\right]$$

$$\varepsilon_3 = \frac{1}{E}\left[\sigma_3 - \mu(\sigma_1 + \sigma_2)\right]$$

式中ε_1，ε_2，ε_3为沿主应力σ_1，σ_2，σ_3方向的线应变，称为**主应变**。

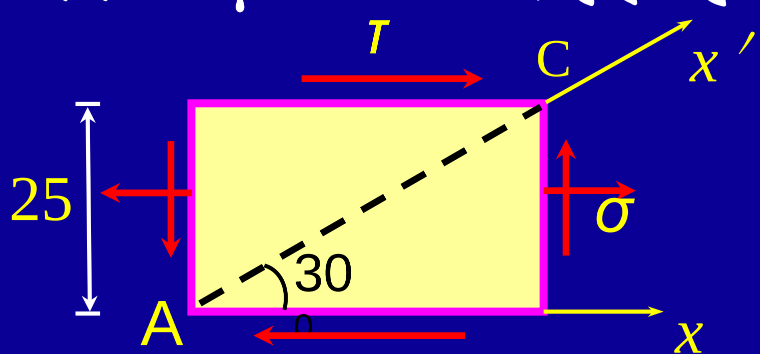
三、三向应力状态下的胡克定律

三个弹性常数之间的关系：

$$G = \frac{E}{2(1+\mu)}$$

四、广义胡克定律的应用实例

例题：钢构件内某一点的应力状态如图所示，已知 σ=30MPa， τ=15MPa。材料的弹性模量E=200GPa，泊松比μ=0.3。试求对角线AC的长度改变量。



解：取坐标系如图所示

$$\sigma_{30^0} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}\cos 60^0 - (-\tau)\sin 60^0$$

$$= 35.49MPa$$

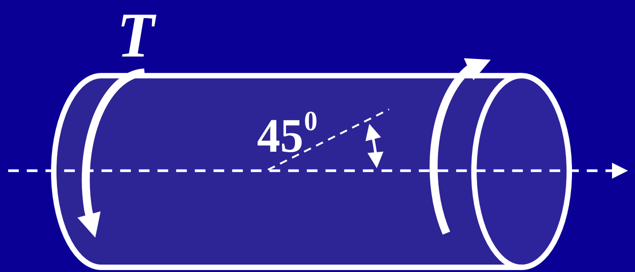
$$\sigma_{-60^0} = \frac{\sigma}{2} + \frac{\sigma}{2}\cos(-120)^0 - (-\tau)\sin(-120)^0 = -5.49MPa$$

AC方向的线应变： $\varepsilon_{30^0} = \frac{1}{E}(\sigma_{30} - \nu\sigma_{-60}) = 1.86\times 10^{-4}$

AC长度的改变量： $\Delta l = \varepsilon_{30^0} l_{AC} = 1.86\times 10^{-4}\times 50 = 9.3\times 10^{-3}mm$

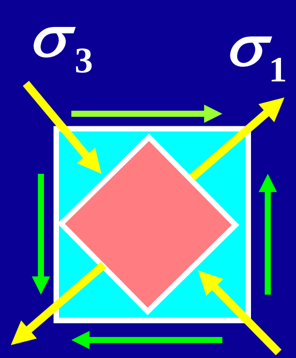
四、广义胡克定律的应用实例

例题：一受扭圆轴,直径d=20mm,圆轴的材料为钢,E=200GPa,μ=0.3.现测得圆轴表面上与轴线成45^0方向的应变为ε=5.2×10^{-4},试求圆轴所承受的扭矩.



解：$\sigma_1 = \tau \quad \sigma_2 = 0 \quad \sigma_3 = -\tau$

$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\sigma_1 - \mu\left(\sigma_2 + \sigma_3\right)\right] \qquad \tau = \frac{T}{W_p}$$

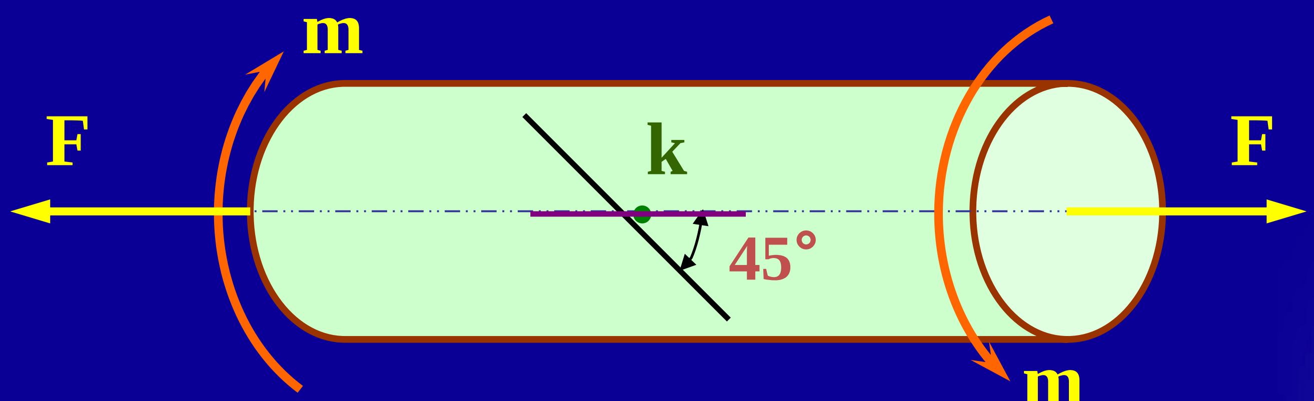


$$\varepsilon_1 = \frac{1}{E}\left[\tau + \mu\tau\right] = \frac{1+\mu}{E}\tau$$

$$T = \frac{\varepsilon E \pi d^3}{16(1+\mu)} = \frac{5.2\times10^4\times200\times10^3\times\pi\times2^3}{16(1+0.3)} = 125.7Nm$$

四、广义胡克定律的应用实例

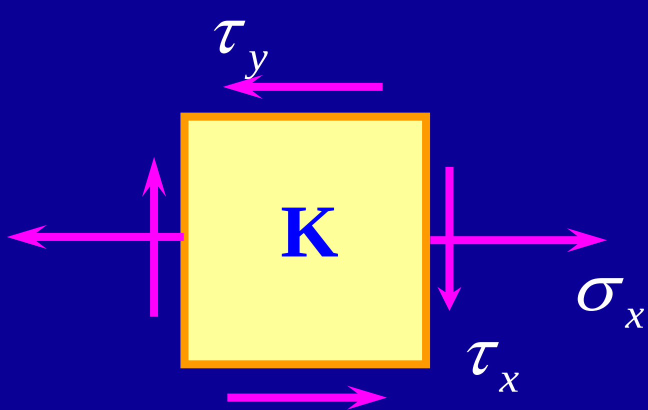
例题：一圆轴承受轴向拉伸及扭转的联合作用,拉力F=100kN,力矩m=10kN.m，若轴的直径D=100mm,弹性模量E=200GPa,泊松比μ=0.3。试计算圆轴外表面上K点沿轴线和-45^0方向的线应变。



四、广义胡克定律的应用实例

解：(1) K点处的应力状态分析

在K点取出单元体：



其横截面上的应力分量为：

$$\sigma_x = \frac{F_N}{A} = \frac{F}{A} = \frac{100\times10^3}{\frac{\pi\times0.1^2}{4}} = 12.7MPa,$$

$$\tau_x = \frac{T}{W_p} = \frac{m}{\frac{\pi}{16}D^3} = \frac{10\times10^3}{\frac{\pi}{16}\times0.1^3} 50.9MPa$$

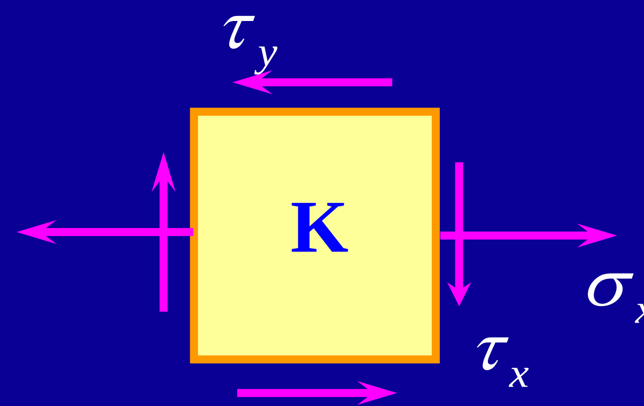
(2) 计算轴线方向的线应变

由广义胡克定律：

$$\varepsilon_x = \frac{1}{E}\left(\sigma_x - \mu\sigma_y\right) = \frac{\sigma_x}{E} = \varepsilon_0 = 6.35\times10^{-5}$$

四、广义胡克定律的应用实例

（3）计算-45^{0}方向的线应变



$$\varepsilon_{-45^0}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{-45^0}-\mu\sigma_{45^0}\right)$$

$$\sigma_{-45^0}=\frac{\sigma_x}{2}+\frac{\sigma_x}{2}\cos 2(-45^0)-\tau_x\sin 2(-45^0)=\frac{\sigma_x}{2}+\tau_x=57.25MPa$$

$$\sigma_{45^0}=\frac{\sigma_x}{2}+\frac{\sigma_x}{2}\cos 2(45^0)-\tau_x\sin 2(45^0)=\frac{\sigma_x}{2}-\tau_x=-44.6MPa$$

$$\varepsilon_{-45^0}=\frac{1}{E}\left(\sigma_{-45^0}-\mu\sigma_{45^0}\right)=3.5\times 10^{-4}$$