石家莊鐵道大學
SHIJIAZHUANG TIEDAO UNIVERSITY

网络精品课程

材料力学

第十章 应力状态与强度理论

第三讲 主应力和主平面

主讲 ：刘灵灵

主要内容

- 一、基本概念
- 二、应力状态的分类
- 三、主应力和主平面的确定
- 四、例题

一、基本概念

主平面： 单元体上切应力为零的平面。

主应力： 主平面上的正应力。

主方向： 主平面的法线方向。

主单元体： 全部由主平面构成的单元体。

- **弹性力学可以证明：** 通过受力构件内的任一点，一定存在三个互相垂直的主平面。

- 三个主应力用σ_1、σ_2、σ_3表示，按代数值大小顺序排列，**即 $\sigma_1 \geq \sigma_2 \geq \sigma_3$。**

二、应力状态的分类

- **单向应力状态：**三个主应力中只有一个不等于零；
- **二向（平面）应力状态：**两个主应力不等于零；
- **三向（空间）应力状态：**三个主应力皆不等于零；
- 单向应力状态也称为**简单应力状态；**
- 二向和三向应力状态统称为**复杂应力状态**。

三、主应力和主平面的确定

$$\begin{cases} \sigma_\alpha = \dfrac{\sigma_x + \sigma_y}{2} + \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\cos 2\alpha - \tau_x \sin 2\alpha \\ \tau_\alpha = \dfrac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha \end{cases}$$

$$\frac{d\sigma_\alpha}{d\alpha} = -2\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\sin 2\alpha + \tau_x \cos 2\alpha\right)$$

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} \qquad \alpha_0 \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

$$\boxed{\begin{matrix}\sigma_{\max} \\ \sigma_{\min}\end{matrix} = \frac{\sigma_x + \sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x - \sigma_y}{2}\right)^2 + \tau_x^2}}$$

可以证明：最大和最小正应力是两个主应力。

三、主应力和主平面的确定

3、主应力和主平面的确定

$$\frac{d\tau_\alpha}{d\alpha}=(\sigma_x-\sigma_y)\cos 2\alpha-2\tau_x\sin 2\alpha \qquad \tan 2\alpha_\tau=\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2\tau_x}$$

$$\boxed{\begin{matrix}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{matrix}=\pm\sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}}$$

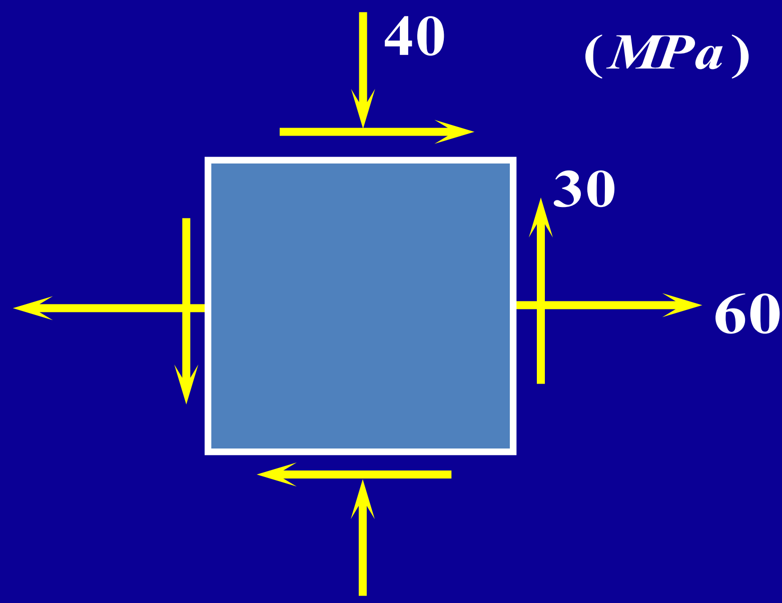
$$\tan 2\alpha_0\times\tan 2\alpha_\tau=-1$$

即最大和最小切应力所在平面与主平面的夹角是45^0。

四、例题

例题：一点处的平面应力状态如图所示。

试求：（1）主应力、主平面；（2）绘出主应力单元体（3）最大切应力。



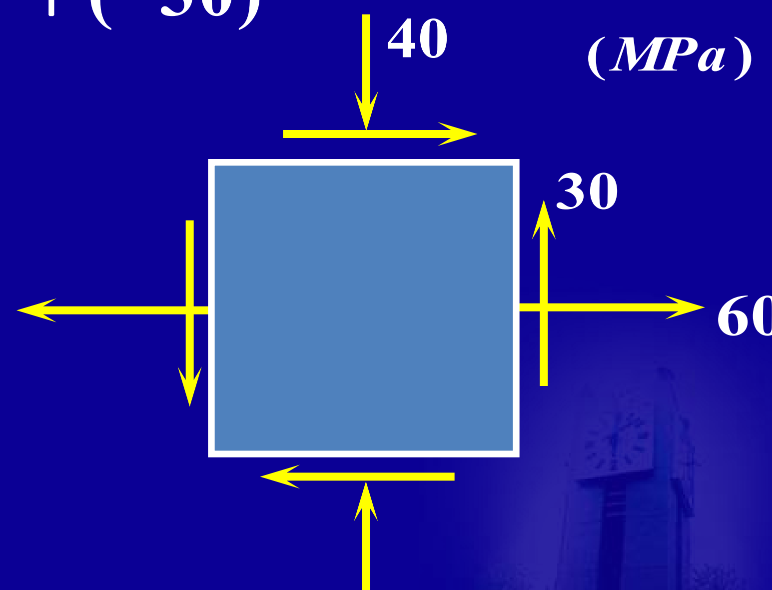
四、例题

(1) 主应力、主平面

$$\left.\begin{matrix}\sigma_{\max}\\ \sigma_{\min}\end{matrix}\right\} = \frac{\sigma_x+\sigma_y}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{\sigma_x-\sigma_y}{2}\right)^2+\tau_x^2}$$

$$= \frac{60-40}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{60+40}{2}\right)^3+(-30)^2}$$

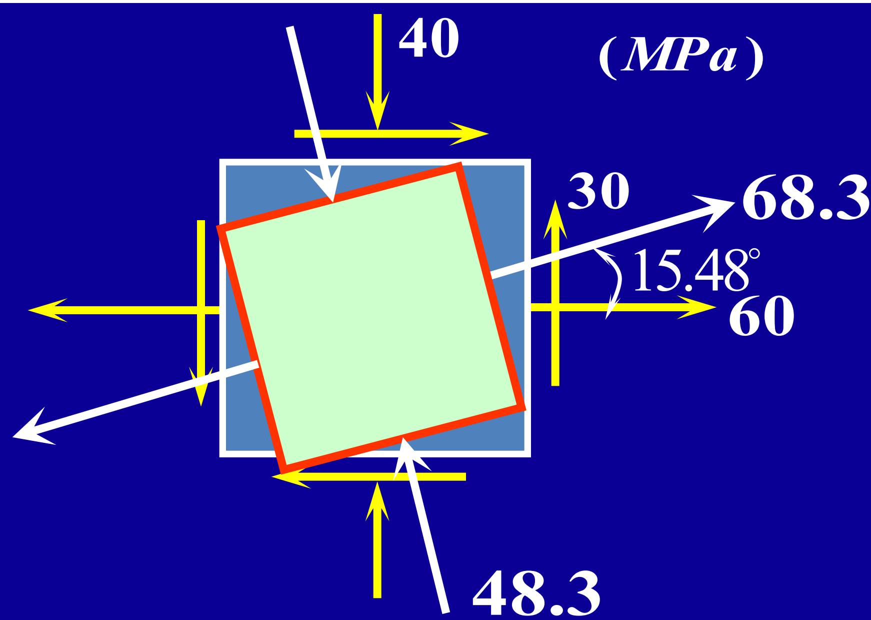
$$= \begin{matrix}68.3MPa\\ -48.3MPa\end{matrix}$$



$$\sigma_1 = 68.3MPa \quad \sigma_2 = 0$$

$$\sigma_3 = -48.3MPa$$

四、例题



(2)主平面的方位

$$\tan 2\alpha_0 = -\frac{2\tau_x}{\sigma_x - \sigma_y} = -\frac{-60}{60+40} = 0.6$$

$$\therefore \alpha_0 = 15.48^\circ (-74.52^0)$$

σ_{max}作用面方位角α_1的判定规则：

1)若$\sigma_x > \sigma_y$,则α_1的绝对值小于45^0；

2)若$\sigma_x < \sigma_y$,则α_1的绝对值大于45^0；

3)若$\sigma_x = \sigma_y$,则$\alpha_1=-45^0$（$\tau_x>0$）；$\alpha_1=45^0$（$\tau_x<0$）。

四、例题

(3)最大切应力

$$\left.\begin{array}{l}\tau_{\max}\\ \tau_{\min}\end{array}\right. = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\sigma_x-\sigma_y\right)^2+4\tau_x^2} = \pm 58.3\,MPa$$